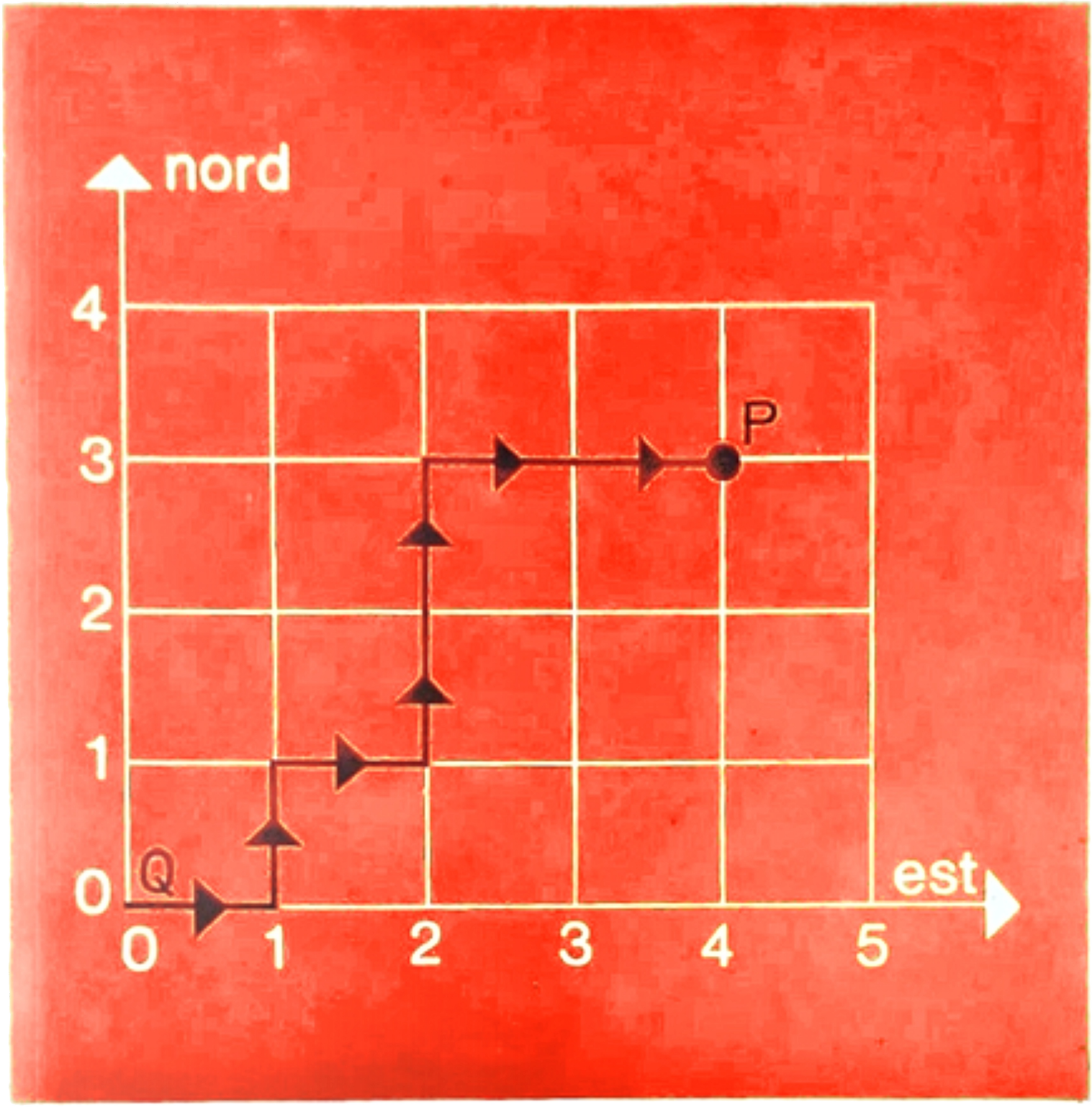


Giovanni Prodi

Matematica come scoperta

per il biennio delle scuole medie superiori

Casa editrice G D Anna
Messina Firenze

1

Giovanni Prodi

Matematica come scoperta

per il biennio delle scuole medie superiori

1

Indice

Prefazione 5

1
Parliamo di probabilità

1.1 La nozione di probabilità 7
1.2 Una prima definizione di probabilità 10
Vocaboli e simboli 12
Esercizi 12

2
Provando e riprovando ...

2.1 L'esperienza delle prove ripetute 13
2.2 Il guadagno medio 15
Vocaboli e simboli 17
Esercizi 17

3
Gli insiemi e la probabilità

3.1 Significato probabilistico dell'intersezione, dell'unione, della differenza fra insiemi 18
3.2 Alcune semplici formule probabilistiche 20
Vocaboli e simboli 24
Esercizi 24

4
Arriva Cartesio ...

4.1 Il prodotto cartesiano; significato probabilistico 26
4.2 Alcuni esempi importanti 28

4.3 Esperimenti indipendenti; la regola del prodotto 32
Vocaboli e simboli 34
Esercizi 34

5
Probabilità con piú disinvoltura ...

5.1 La moneta asimmetrica 36
5.2 Probabilità desunta dalle statistiche 37
5.3 L'impiego dei grafi 39
5.4 Un ulteriore esempio 40
Vocaboli e simboli 41
Esercizi 41

6
Arriva Pascal ...

6.1 Prove ripetute e numeri di Pascal 42
6.2 Una passeggiata a caso 45
6.3 I numeri di Pascal e i sottoinsiemi 46
6.4 Alcuni esempi interessanti 47
Vocaboli e simboli 50
Esercizi 50

7
L'utilità dei fannulloni

7.1 Un problema probabilistico di Galilei 52
7.2 Un problema probabilistico di Pascal 54
7.3 Variabili aleatorie e valori medi 56
Vocaboli e simboli 58
Esercizi 58

8
I numeri relativi

8.1 Gli interi relativi 60
8.2 I razionali relativi: struttura additiva 65
Esercizi 67
8.3 I razionali relativi: struttura moltiplicativa 67
Vocaboli e simboli 73
Esercizi 74

9
Calcoli ed espressioni

9.1	Costruzione delle espressioni	76
9.2	Elaborazione delle espressioni. Polinomi	78
	Esercizi	81
9.3	Prodotti notevoli	81
	Esercizi	85
9.4	Alcuni esercizi aritmetici	86
9.5	Espressioni fratte	88
	Vocaboli e simboli	90
	Esercizi	90

10
Equivalenze, uguaglianze e disuguaglianze

10.1	Relazioni. Relazioni di equivalenza	92
	Esercizi	94
10.2	Relazioni di ordine. La struttura di ordine nei razionali	94
	Esercizi	99
10.3	Le equazioni: alcune riflessioni generali sui metodi per risolverle	100
	Esercizi	104
10.4	Le disequazioni: alcuni interessanti problemi	105
	Vocaboli e simboli	110
	Esercizi	111

11
Le scatole cinesi

11.1	Valori approssimati	112
	Esercizi	113
11.2	Achille e la tartaruga: un'interpretazione	113
11.3	La divisione fra gli interi e la rappresentazione decimale dei razionali	116
11.4	L'incommensurabilità della diagonale del quadrato con il lato	121
11.5	Le scatole cinesi	123
11.6	Una questione di strategia	125
11.7	I numeri reali e le loro proprietà algebriche	128
	Vocaboli e simboli	131
	Esercizi	132

12
Le applicazioni

12.1 Applicazione (o funzione o trasformazione) 133
Esercizi 135
12.2 Applicazioni iniettive, applicazioni surgettive. Applicazione inversa 136
Esercizi 139
12.3 La composizione delle applicazioni 139
Esercizi 143
12.4 Numero delle applicazioni tra insiemi finiti; impiego dei risultati ottenuti in problemi probabilistici 144
Vocaboli e simboli 150
Esercizi 150

13
Per la via piú breve ...

13.1 La nozione di distanza 153
Esercizi 155
13.2 Assiomi e teoremi. Gli assiomi della distanza. Il cerchio 156
13.3 Gli assiomi della retta. Le coordinate sulla retta 159
13.4 La probabilità sulla retta 163
Esercizi 165
13.5 Semipiani, angoli, poligoni 165
13.6 Alcuni teoremi sui triangoli 170
Vocaboli e simboli 173
Esercizi 173

14
Le simmetrie

14.1 Le isometrie 176
Esercizi 179
14.2 La simmetria assiale. Rette ortogonali. Il problema di Erone 180
Esercizi 185
14.3 L'asse di un segmento. Ortogonalità e parallelismo 186
Esercizi 189

14.4 La simmetria centrale 190
Esercizi 194
14.5 Triangoli e quadrilateri con simmetrie. Estensione del concetto di simmetria 195
Vocaboli e simboli 200
Esercizi 201

15
Da Euclide a Cartesio

15.1 L'assioma del rapporto di proiezione e il teorema di Pitagora 202
Esercizi 207
15.2 L'unicità della parallela e alcune importanti conseguenze 208
Esercizi 213
15.3 Gli assi cartesiani e le coordinate nel piano. Le distanze fra due punti 214
Vocaboli e simboli 219
Esercizi 220

Prefazione

In questi ultimi anni è molto cresciuto anche nel nostro paese l'interesse per l'insegnamento scientifico a livello delle scuole secondarie. Per quanto riguarda la matematica, non c'è dubbio che ha avuto notevole importanza l'istituzione, avvenuta già da piú di un decennio, dell'« indirizzo didattico » per il corso di laurea in matematica: naturale punto di collegamento fra università e scuola secondaria. Proprio nel suo lavoro di preparazione dei futuri insegnanti, l'autore ha avuto occasione di riflettere sull'attuale situazione dell'insegnamento e su quanto si può fare per rinnovarlo.

Una tappa importante per l'elaborazione di idee e proposte è stata la formulazione dei « Programmi di Frascati » (1966-67): è stato un vero peccato che questi programmi — indubbiamente interessanti ed equilibrati — non abbiano avuto la diffusione auspicata.

Recentemente, l'autore ha avuto la possibilità di sottoporre al vaglio dell'esperienza un piano di insegnamento già da tempo abbozzato: ed ecco appunto il libro che espone l'itinerario di un primo anno di lavoro.

L'idea base di questo piano è che il modo piú autentico di fare matematica è quello di risolvere problemi. Nessuno può negare l'importanza di una teoria che inquadri organicamente le singole nozioni: tuttavia, un insegnamento della matematica che avesse come unico scopo l'acquisizione di risultati e di tecniche, senza provocare un'attività di ricerca e di elaborazione (proporzionata, s'intende, all'età e alle capacità) sarebbe, in definitiva, controproducente.

La metodologia che si richiede per questo tipo di insegnamento è, ovviamente, l'educazione a pensare: si potrebbe anche parlare di educazione graduale allo sforzo intellettuale. Un'enunciazione programmatica come questa può

apparire dura in un momento come quello di oggi in cui molti educatori (pur dicendo tutto il male possibile del « nozionismo ») propongono un insegnamento « per immagini » che non dà sufficiente spazio alla riflessione e alla rielaborazione personale.

Tuttavia, come l'esperienza ha dimostrato, un programma come questo non risulta difficile. Come si sa, la difficoltà è in larga misura relativa: i ragazzi riescono a mobilitare notevoli risorse quando si appassionano ad un problema ed arrivano a sperimentare la soddisfazione di risolverlo.

Fra le caratteristiche piú salienti di questa esposizione vi è quella di non avere compartimenti stagni: i vari argomenti si intrecciano senza separazioni. L'esposizione vuole essere piú ricca di « fatti » matematici che di parole. L'autore si sentirebbe notevolmente imbarazzato se dovesse definire « moderno » o « tradizionale » questo o quel punto dello svolgimento: preferisce non usare una terminologia che ha già prodotto troppi equivoci.

Con il secondo volume, l'insegnante avrà a disposizione per il biennio un materiale abbondante: potrà omettere qualche punto o abbreviarne qualche altro, cosí da soddisfare i suoi gusti e le esigenze di orario. Non sarà neppure difficile soddisfare le esigenze dei vecchi (e ancora vigenti) programmi ministeriali, sia per il primo biennio del liceo scientifico che per quello dell'istituto tecnico industriale.

L'autore sente il gradito dovere di ringraziare tutti i Colleghi che gli hanno fornito consigli, indicazioni e critiche: in particolare l'amico Prof. V. Checcucci, dalla cui acutezza e fantasia ha largamente attinto, e la Prof.ssa M. A. Bettini Mariotti, che ha condotto con dedizione e competenza la sperimentazione didattica, validamente aiutata dalla Prof.ssa G. Pistelli. L'autore è anche riconoscente all'Istituto « Santa Caterina » (in Pisa) che ha dato la possibilità di condurre la sperimentazione didattica in condizioni veramente ottimali.

Infine l'autore esprime il suo grato apprezzamento all'editore G. D'Anna che, accettando volentieri la pubblicazione del lavoro, ha dimostrato una viva sensibilità per le esigenze di rinnovamento della Scuola.

1

Parliamo di probabilità

1.1 Nella nostra vita di ogni giorno, vi è una grande quantità di situazioni incerte. Ad esempio, al momento di progettare un viaggio non possiamo sapere se il tempo sarà buono o cattivo, se le ferrovie funzioneranno regolarmente o no, ecc. Tuttavia, noi non ci rassegniamo alla nostra ignoranza e cerchiamo di fare previsioni. Sappiamo, ad esempio, che in Italia il mese di ottobre è piú piovoso del mese di luglio: se dobbiamo fare un viaggio in ottobre mettiamo l'ombrello in valigia, mentre in luglio riteniamo pressoché inutile questa precauzione. Questo esempio ci fa capire che spesso, nella vita pratica, dobbiamo prendere decisioni in situazioni di incertezza, e ci comportiamo facendo, piú o meno consapevolmente, delle valutazioni di **probabilità.**

La nozione di probabilità

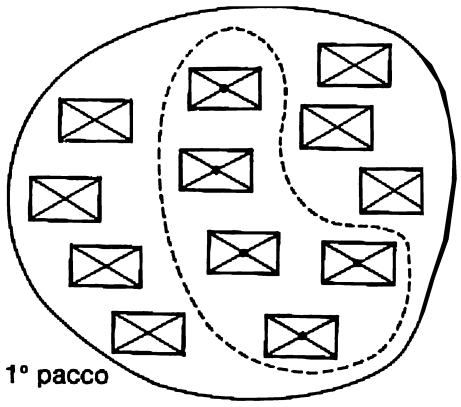
Proponiamo ora di studiare una situazione di incertezza particolarmente semplice.

Ci sono 12 buste, di cui 5 contengono un biglietto che dà diritto ad un premio; le altre 7 sono vuote. Ne prendo una a caso; dal di fuori le buste sono tutte uguali. Può accadere che estragga una busta con il biglietto, può accadere che la busta estratta sia vuota. L'estrazione della busta con il biglietto è un evento che non mi è possibile prevedere (**evento** è il termine tecnico con cui si indica un'enunciazione soggetta ad incertezza).

Accanto al pacco di buste ora considerato (12 buste, con 5 biglietti), c'è un secondo pacco con 12 buste e 3 biglietti, messi in altrettante buste.

Diamo la possibilità ad Evaristo * di scegliere una busta da un pacco o dall'altro, come preferisce. Evaristo non ha dubbi: sceglie dal primo pacco. Non è affatto sicuro di trovare il biglietto nella busta, ma sa che nel primo pacco questo evento è piú probabile: ci sono 5 casi favorevoli, mentre nel secondo caso ce ne sono solo 3, con lo stesso numero totale di buste.

Ricorriamo ad una rappresentazione grafica (fig. 1).



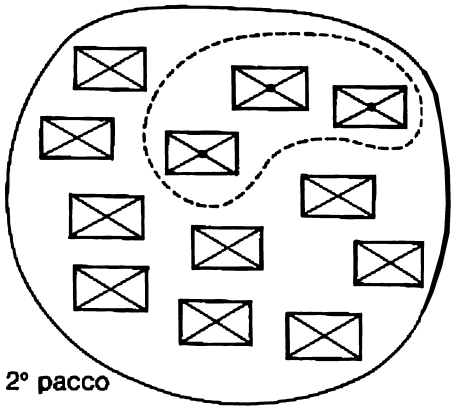
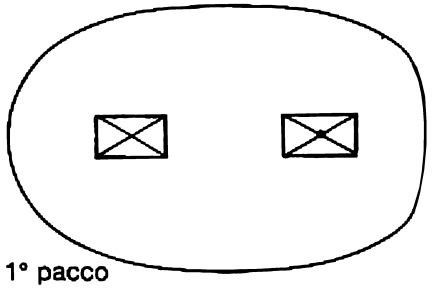


Fig. 1

Qui abbiamo rappresentato, in entrambi i casi, l'insieme delle 12 buste; le buste con il biglietto sono un sottoinsieme dell'insieme delle buste; esso è indicato con una cerchiatura tratteggiata e comprende, nel primo caso, 5 elementi, nel secondo caso 3. Ricordiamo che i matematici chiamano **insieme** una qualsiasi raccolta di oggetti; questi vengono detti **elementi** e si dice che **appartengono** all'insieme. Nel linguaggio usuale vi sono vari vocaboli, piú o meno specializzati, per indicare una collettività: ad esempio, se si tratta di pecore, si parla di gregge, se si tratta di francobolli, si parla di collezione, ecc.; i matematici preferiscono usare il solo vocabolo «insieme», con significato generale. Se A e B sono due insiemi e se ogni elemento di A appartiene anche a B, si dice che A è un **sottoinsieme** di B, o che A è **contenuto** in B.

Per indicare che A è un insieme composto dagli elementi a , b , c , d si usa scrivere $A = \{a , b , c , d\}$. È poi comodo introdurre un insieme fittizio che non ha alcun elemento; esso viene detto **insieme vuoto** ed è indicato col simbolo $\emptyset$.



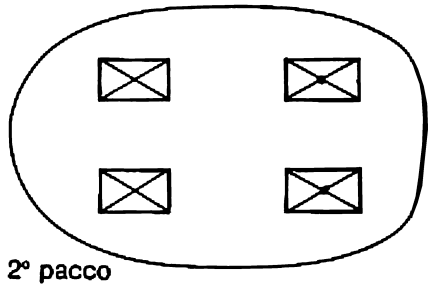


Fig. 2

Ritorniamo alle nostre buste e supponiamo di offrire ad Evaristo due pacchi diversi, con la seguente situazione:

2 buste di cui 1 con il biglietto
4 buste di cui 2 con il biglietto

* Giovane di belle speranze, molto versato in matematica.

Nel passaggio dal primo al secondo pacco, il numero dei casi favorevoli si è raddoppiato, ma è raddoppiato anche il numero totale dei casi, ed è raddoppiato perciò anche il numero dei casi sfavorevoli. È evidente perciò per Evaristo che la probabilità di un esito favorevole è la stessa per i due pacchi.

Cosí pure sono equivalenti le due seguenti situazioni:

5 buste con 2 biglietti

15 buste con 6 biglietti

Consideriamo ora i due seguenti pacchi, con:

16 buste di cui 3 con il biglietto

8 buste di cui 2 con il biglietto

Nel secondo pacco la situazione è quella che si avrebbe con 16 buste di cui 4 con il biglietto; dunque il secondo pacco è piú favorevole per l'estrazione.

Ormai è chiaro (non solo per Evaristo, ma per tutti) che è importante solo il rapporto fra il numero delle buste con il biglietto e il numero totale. Se n è il numero complessivo delle buste, m il numero delle buste con il biglietto, diciamo che *la probabilità di estrarne una con il biglietto è* $\frac{m}{n}$.

Per i primi due pacchi (cfr. fig. 1) le probabilità sono rispettivamente $\frac{5}{12}$ e $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, e si verifica subito che effettivamente si ha $\frac{5}{12} > \frac{3}{12}$.

Nell'esempio successivo (cfr. fig. 2) la probabilità è uguale per i due pacchi: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

1.2 Vediamo un altro esempio. Consideriamo un dado; esso presenta sei facce, numerate da 1 a 6. Se il dado è costruito bene, dobbiamo attribuire a ciascuna faccia la stessa probabilità di comparire in un lancio, cioè $\frac{1}{6}$. Domandiamoci quale è la probabilità che in un lancio compaia un *numero pari*. Questo evento si realizza quando compare uno dei tre numeri: 2, 4, 6. Dunque la probabilità cercata è $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Una prima definizione di probabilità

Quanto abbiamo fatto è intuitivamente chiaro, ma ora noi vogliamo fare uno sforzo per capirlo piú razionalmente. Le considerazioni che ora facciamo potranno risultare un po' difficili: occorrerà rileggerle piú avanti, quando avremo progredito nel nostro studio.

Supponiamo che un certo esperimento (ad es.: il lancio del nostro dado) possa avere n esiti diversi e che di questi se ne verifichi uno ed uno solo. (Nel caso del dado, è chiaro che dopo un lancio una sola faccia si presenta in alto).

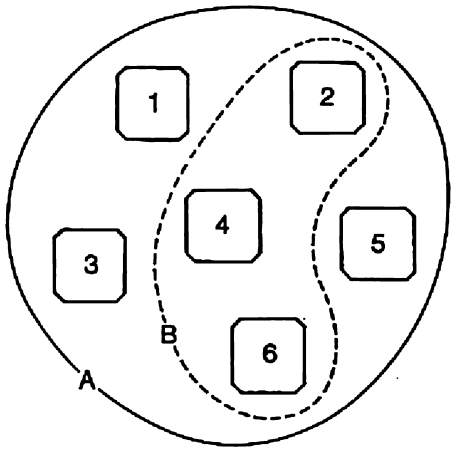


Fig. 3

I vari esiti possibili vengono detti **eventi elementari:** essi costituiscono un insieme A, che possiamo chiamare **esperimento,** dal momento che esso presenta tutti i casi che possono verificarsi in una prova (nell'esempio: è l'insieme delle 6 facce del dado; cfr. fig. 3).

Ora noi vogliamo occuparci di un certo evento (nell'esempio: la comparsa di un numero pari); questo evento si verifica quando si verifica uno degli eventi elementari che fanno parte di un certo sottoinsieme B (nell'esempio: quello delle facce 2, 4, 6). *È ragionevole ritenere che la probabilità dell'evento rappresentato da B sia la somma delle probabilità degli eventi elementari contenuti in B.*

Se il sottoinsieme B coincide con A, allora esso rappresenta un evento che si verifica certamente. Ora, *noi imponiamo che un evento certo debba avere probabilità* 1 (questo è un po' come fissare una ... unità di misura per la probabilità!); *in molti casi*, come quelli che abbiamo studiato, *è ragionevole pensare che i vari eventi elementari debbano avere la stessa probabilità*: nel caso di un dado, se esso è ben costruito, non c'è motivo di pensare che una faccia abbia maggiore probabilità di presentarsi di un'altra; altro sarebbe il caso di un dado in cui una faccia fosse piú pesante delle altre. (A questa bisognerebbe attribuire probabilità minore di quella della faccia opposta, perché tenderebbe a finire in basso).

Dunque, *se le probabilità degli n eventi elementari sono uguali ed hanno per somma* 1, *ciascuna di esse deve essere uguale a* $\frac{1}{n}$.

Ecco allora la nostra conclusione: se l'evento B è composto di m eventi elementari, la sua probabilità è data da

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{numero degli elementi di } B}{\text{numero degli elementi di } A}$$

Con denominazione tradizionale, gli eventi elementari vengono detti « casi possibili », mentre si dicono « casi favorevoli » gli eventi elementari che compongono l'evento B che interessa. Si dice allora che *la probabilità è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.*

Ma — lo ripetiamo — questa definizione è valida solo se ammettiamo che *gli eventi elementari abbiano uguale probabilità.*

In futuro dovremo allargare la nostra definizione (per comprendere sia il caso di eventi elementari con diversa probabilità, sia il caso in cui vi siano infiniti eventi elementari). Ma, per ora, que-

sta definizione ci basta e ci permette di trovare una grande quantità di cose interessanti.

Vocaboli e simboli

evento
probabilità
evento elementare
esperimento
insieme, elemento, appartenere
sottoinsieme, contenere
insieme vuoto: $\varnothing$

Esercizi

1 Disporre in ordine crescente le seguenti frazioni:

$$\frac{2}{5} \; ; \; \frac{2}{9} \; ; \; \frac{3}{5} \; ; \; \frac{1}{2} \; ; \; \frac{3}{4} \; ; \; \frac{1}{8} \; ; \; \frac{9}{8}$$

Disporre in ordine crescente:

$$0{,}75 \; ; \; \frac{9}{8} \; ; \; \frac{3}{4} \; ; \; \frac{4}{3} \; ; \; 0{,}8 \; ; \; \frac{8}{9} \; ; \; \frac{12}{6} \; ; \; 1{,}92$$

2 Lanciando un dado, quale è la probabilità di ottenere:

un numero divisibile per tre;
un numero dispari?

3 In un sacchetto ci sono 7 palline azzurre, 5 rosse, 3 nere. Estraendo una pallina a caso quale è la probabilità di averla azzurra, rossa, nera?

4 Un cubo di legno verniciato in azzurro viene tagliato con piani paralleli alle facce in 1000 cubetti uguali che vengono poi mescolati. Quale è la probabilità che un cubetto preso a caso

abbia una sola faccia azzurra;
abbia due facce azzurre;
abbia tre facce azzurre;
nessuna faccia azzurra?

5 In una classe ci sono 22 alunni. Per interrogarli, il professore di lettere procede a sorte: ha un sacchetto che contiene 30 palline, numerate da 1 a 30, e ne estrae una. Se il numero estratto non supera 22, interroga il ragazzo che ha sul registro quel numero, se il numero supera 22 fa la somma delle cifre e interroga il ragazzo che corrisponde al numero ottenuto. È giusto? Quale è la probabilità che ha ciascun ragazzo di essere interrogato?

2

Provando e riprovando ...

2.1 Qual è il significato della probabilità di un evento? Prendiamo il solito sacchetto con 5 palline: 3 rosse e 2 azzurre. Come abbiamo visto, la probabilità di estrarre a caso una pallina rossa è $\frac{3}{5}$.

L'esperienza delle prove ripetute

Ma se estraiamo a caso una pallina, questa può risultare rossa o azzurra, senza che si possa fare una previsione sicura. Che rilevanza pratica ha allora la probabilità che abbiamo calcolato?

Una buona idea può essere quella di *fare varie prove, estraendo una pallina, e poi rimettendola dentro ogni volta*, in modo da ritornare alla stessa situazione di partenza. Per fare bene questo esperimento, naturalmente, occorre avere preso palline del tutto uguali, salvo che per il colore. È necessario anche fare razionalmente la contabilità delle palline che escono: è comodo usare carta quadrettata e segnare un lato di un quadratino per ogni unità che si deve accumulare. Una volta completato il perimetro del quadratino, si segnerà una diagonale e così avremo registrato un insieme di cinque «punti» per ogni quadratino.

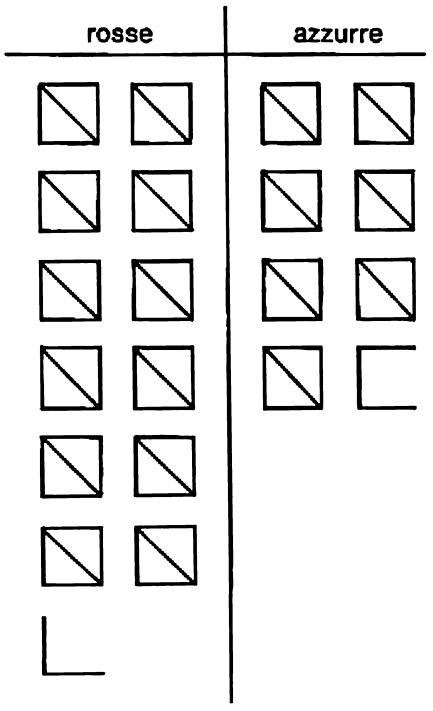


Fig. 1

La tabella della figura 1 ci dà l'esito di una serie di 100 prove successive che abbiamo eseguito in classe. Man mano che proseguivamo nelle prove, abbiamo trovato questi risultati:

	rosse	azzurre
in 20 prove	17	3
in 50 prove	32	18
in 100 prove	62	38

Consideriamo ora *il rapporto fra il numero delle prove in cui si è verificato l'evento* (l'uscita di una pallina rossa) *e il numero totale delle prove: questa frazione viene detta* **frequenza relativa.**

Nel caso del nostro esperimento, per l'evento « uscita della pallina rossa », abbiamo trovato le seguenti frequenze relative:

in 20 prove: frequenza: $\frac{17}{20} = \frac{85}{100} = 0{,}85$

in 50 prove: frequenza: $\frac{32}{50} = \frac{64}{100} = 0{,}64$

in 100 prove: frequenza: $\frac{62}{100} = 0{,}62$

Si è visto che, aumentando il numero delle prove, la frequenza relativa, che prima era lontana dalla probabilità, finiva per avvicinarsi notevolmente. (Ricordiamo che la probabilità è $\frac{3}{5} = 0{,}60$).

Abbiamo deciso allora di fare molte altre prove: ciascun allievo ha fatto, per conto suo, 300 prove; in tutto gli allievi sono 19 e cosí abbiamo potuto disporre di un totale di 5700 prove. A conti fatti, la pallina rossa è uscita 3413 volte. Dunque in 5700 prove la frequenza relativa è stata:

$$\frac{3413}{5700} \simeq 0{,}598$$

Dunque, ci siamo notevolmente avvicinati alla probabilità. Qui però occorre stare bene attenti: non possiamo affermare *con certezza* che, aumentando il numero delle prove, la frequenza relativa si avvicina alla probabilità. Infatti, per fare un esempio, non possiamo escludere che, anche in 5700 prove, esca sempre una pallina rossa (quindi che la frequenza relativa sia 1) oppure sempre l'azzurra (quindi: frequenza 0). Certamente, se questo accadesse, ci meraviglieremmo molto!

Il calcolo delle probabilità non ci permette di escludere queste eventualità strane; *ci dice soltanto che l'avvicinarsi della frequenza relativa alla probabilità è un evento che diventa ... sempre piú probabile con l'aumentare del numero delle prove.* Questo discorso non è facile, ed ha quasi l'aspetto di un gioco di parole; solo quando saremo molto piú avanti nei nostri studi potremo chiarirlo completamente. (Si tratta della cosiddetta «legge dei grandi numeri»).

2.2 Supponiamo ora che due persone, Nico e Peppo, trasformino il nostro esperimento in un gioco d'azzardo, in questo modo: **Il guadagno medio**

Nico riceve da Peppo
400 lire tutte le volte che esce una pallina rossa

Peppo riceve da Nico
500 lire tutte le volte che esce una pallina azzurra

Vediamo qual è il risultato probabile del gioco, quando lo si gioca per un numero di colpi n molto grande; supponiamo che la pallina rossa venga estratta m volte. Ci interessa sapere quanto ricava in media Nico per ogni colpo: evidentemente in totale Nico ricava $400m$ lire, quindi, ogni colpo, in media $\frac{400\,m}{n}$ lire. Se ammettiamo che il numero $\frac{m}{n}$ (frequenza relativa)

possa essere sostituito con la probabilità, che è $\frac{3}{5}$, il ricavo possibile di Nico sarà di

$$\frac{3}{5} \cdot 400 = 240 \text{ lire per ogni colpo.}$$

Nello stesso tempo, però, Nico ha una perdita di 500 lire tutte le volte che esce una pallina azzurra. Quindi Nico ha una perdita probabile di

$$\frac{2}{5} \cdot 500 = 200 \text{ lire per ogni colpo.}$$

Perciò Nico ha un **guadagno medio** di 40 lire per ogni colpo. È molto probabile che, su una lunga serie di colpi Nico risulti vincitore, con un guadagno medio vicino a 40 lire per ogni colpo; tuttavia la fortuna è capricciosa e può benissimo accadere, specialmente su una serie non troppo lunga di partite, che le cose vadano in modo diverso.

Un gioco si dice **equo** *se il* **guadagno medio** *di ogni giocatore è nullo.* Sarebbe equo il gioco fra Nico e Peppo se, ferma restando la vincita di Nico, per ogni pallina rossa, Nico dovesse dare a Peppo 600 lire per ogni pallina azzurra: infatti $\frac{3}{5}\ 400 - \frac{2}{5}\ 600 = 0$. Il gioco del lotto (in cui un privato ha come avversario l'Amministrazione dello Stato) non è mai equo, ed è svantaggioso per il privato, come vedremo piú avanti. Può accadere che, in casi fortunati, un giocatore realizzi una buona vincita, ma nella generalità dei casi, lo Stato incasserà una somma molto superiore a quella che distribuisce per le vincite. Anche nelle case da gioco, chi, alla lunga, ci rimette è sempre il cliente. Il calcolo delle probabilità, anche al livello elementare a cui lo affrontiamo, ci porta a renderci conto razionalmente di queste situazioni e ci insegna a non impiegare stupidamente il nostro denaro.

Vocaboli e simboli

frequenza relativa
guadagno medio (viene detto anche **speranza matematica**)
gioco equo

Esercizi

1 Prendere una moneta e lanciarla 200 volte, tenendo nota di quante volte esce «Testa». Fare il calcolo della frequenza relativa dopo 10 prove, dopo 20, 50, 100, 200 e fare un grafico dei valori ottenuti.

2 Nico e Peppo giocano con un dado. Nico punta sul 2 e sul 4, Peppo sugli altri numeri. Nico riceve da Peppo 600 lire in caso di vincita; quante lire deve dare in caso di vincita di Peppo perché il gioco sia equo?

3 In un sacchetto ci sono 15 palline: 5 rosse, 4 azzurre, 6 nere. Tre giocatori hanno messo in palio 1500 lire e puntano ciascuno su un diverso colore. Dimostrare che il gioco è equo se ciascuno ha versato come posta una somma proporzionale alla rispettiva probabilità. (Attenzione: in caso di vincita, il guadagno è dato dalla differenza fra la somma messa in palio e la posta versata!).

3

Gli insiemi e la probabilità

3.1 Abbiamo visto nel primo capitolo che gli eventi si possono rappresentare come sottoinsiemi di un certo insieme: dunque il linguaggio degli insiemi è molto importante per esprimere i concetti fondamentali del calcolo delle probabilità. In questa lezione esponiamo alcune operazioni sugli insiemi (cominciando daccapo, per chi non ne avesse mai sentito parlare) e poi le applichiamo a qualche interessante problema di probabilità.

Significato probabilistico dell'intersezione, dell'unione, della differenza fra insiemi

L'**intersezione** di due insiemi è l'insieme degli elementi comuni ai due insiemi; dunque, se B e C sono due insiemi, la loro intersezione, che si indica con $B \cap C$, (*e si legge: B intersecato C*), è costituita da quegli elementi che appartengono a B e a C.

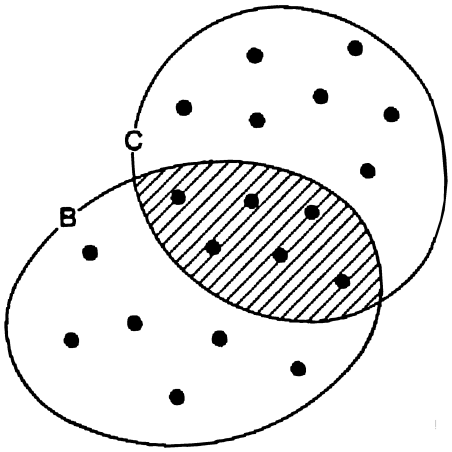


Fig. 1

Ad esempio, se B è l'insieme dei numeri interi ≥ 2 e C è l'insieme dei numeri interi ≤ 6, l'intersezione è l'insieme dei numeri che sono, nello stesso tempo, ≥ 2 e ≤ 6, cioè: $B \cap C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Notiamo che se gli insiemi B e C non hanno elementi in comune (o, come si dice, sono **disgiunti**) la loro intersezione è l'insieme vuoto $\emptyset$. Così, grazie appunto all'insieme vuoto, l'operazione di intersezione si può eseguire anche quando gli insiemi non hanno alcun elemento in comune.

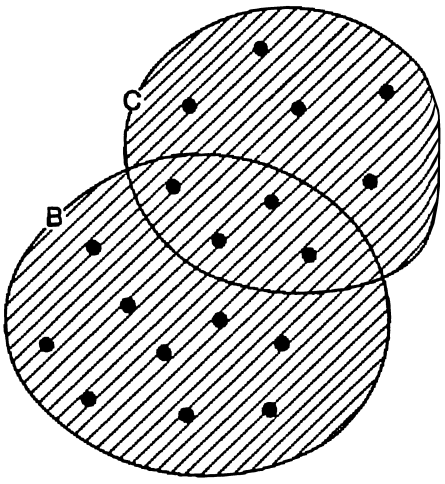


Fig. 2

L'**unione** di due insiemi è l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno di essi. Dunque, se B e C sono gli insiemi, la loro unione,

che si indica con $B \cup C$ (*leggiamo: B unito a C*) è l'insieme degli elementi che appartengono a B o a C.

La « parola chiave » nella definizione dell'unione è la congiunzione **o**, cosí come nella definizione di intersezione è la congiunzione **e**. La congiunzione **o** viene usata qui in senso *non esclusivo* (lo stesso senso della congiunzione latina « *vel* »), come nella frase *Saranno promossi gli allievi che sono intelligenti o diligenti*: qui non vogliamo certamente affermare che gli allievi intelligenti e diligenti saranno bocciati! Dunque, l'intersezione di due insiemi è certamente contenuta nella loro unione.

Abbiamo fatto queste precisazioni perché in italiano la particella **o** ha anche un altro significato, che è detto *esclusivo*, come nella frase *Studia la lezione o ti boccio!*: qui è chiaro che nessun allievo che studia la lezione dovrà essere bocciato. In latino, per questo significato, si userebbe la particella « *aut* ». In italiano, i due significati della particella **o** sono un po' confusi e si chiariscono solo nel contesto del discorso.

Supponiamo ora che un insieme B sia contenuto in un insieme A (che potrà essere detto *insieme ambiente*). Allora, si dice insieme **complementare** di B (rispetto ad A) l'insieme di tutti gli elementi di A che **non** appartengono a B.

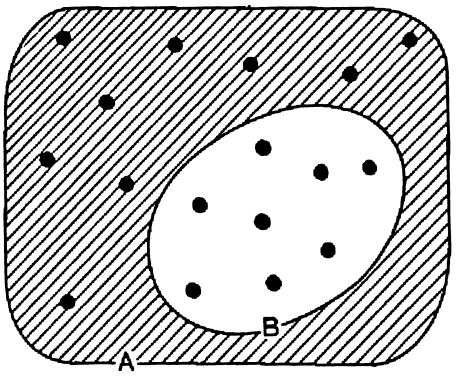


Fig. 3

Qui la « parola chiave » della definizione è la particella **non** (la negazione).

Ad esempio, sia A l'insieme degli *interi naturali*: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ e sia B l'insieme dei numeri *pari*:

$B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$; allora il complementare di B è evidentemente l'insieme dei numeri *dispari*, cioè: $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

Possiamo considerare anche una situazione piú generale, in cui l'insieme B non sia necessariamente

contenuto nell'insieme A: si dice allora insieme **differenza** l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B; questo insieme si indica con $A \setminus B$ (lèggere: A *meno* B, oppure A *senza* B).

Teniamo presente che un insieme può avere *un numero finito* di elementi (come l'insieme $\{0, 1, 2\}$) oppure può avere *infiniti elementi*, come l'insieme degli *interi naturali* $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, che d'ora in poi verrà indicato con il simbolo **N**.

Alcune semplici formule probabilistiche

3.2 Ora vogliamo occuparci del numero degli elementi dei vari insiemi che abbiamo ottenuto, supponendo che gli insiemi assegnati abbiano tutti un *numero finito* di elementi. Per brevità, indicheremo con num. (A) il numero degli elementi dell'insieme A.

Cominciamo dal caso piú semplice in cui due insiemi B e C sono *disgiunti*: allora è evidente che num. $(B \cup C)$ = num. (B) + num. (C). Se gli insiemi B e C non sono disgiunti, questa formula non vale perché gli elementi dell'intersezione, nella somma num. (B) + num. (C), vengono contati due volte. Si deve allora scrivere (vedi la fig. 2):

$$\text{num.}(B \cup C) = \text{num.}(B) + \text{num.}(C) - \text{num.}(B \cap C) \qquad (1)$$

oppure (portando nel primo membro l'ultimo termine):

$$\text{num.}(B \cup C) + \text{num.}(B \cap C) = \text{num.}(B) + \text{num.}(C) \qquad (2)$$

È chiaro che non basta sapere quanti sono gli elementi di B e gli elementi di C per sapere quanti sono quelli di $B \cup C$:

possiamo solo dire che num. $(B \cup C)$ *non supera* num. (B) + num. (C). Ma se, in piú, conosciamo il numero degli elementi dell'intersezione, siamo

in grado di sapere quanti sono gli elementi dell'unione $B \cup C$.

Per il complementare, le cose sono molto semplici; sia B' il complementare dell'insieme B rispetto all'insieme ambiente A. Poiché B e B' sono fra loro disgiunti (per definizione) si ha: num. (B) + num. (B') = num. (A), cioè

$$\text{num.}\,(B') = \text{num.}\,(A) - \text{num.}\,(B) \qquad (3)$$

Tutte queste semplici considerazioni sugli insiemi si applicano ai nostri problemi di probabilità.

Supponiamo ora di lanciare nuovamente un dado: quale è la probabilità di avere *un numero che sia maggiore di* 3 **e** *pari*?

Il problema è molto semplice, ma vogliamo egualmente studiarlo con il metodo che abbiamo imparato.

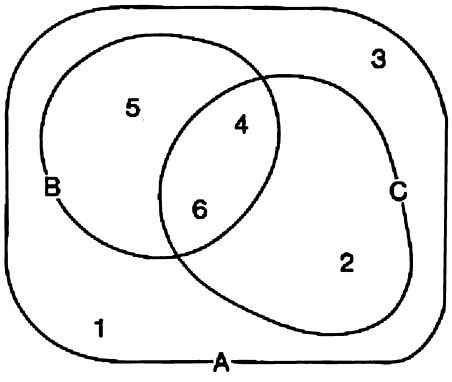


Fig. 4

Sarà

$B = \{4, 5, 6\}$ (insieme dei numeri > 3)
$C = \{2, 4, 6\}$ (insieme dei numeri pari)

Evidentemente è $B \cap C = \{4, 6\}$; quindi la probabilità richiesta è $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

E se volessimo trovare la probabilità di avere *un numero maggiore di* 3 **o** *pari*? Si ha $B \cup C = \{2, 5, 4, 6\}$ e la probabilità richiesta è $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Vogliamo cercare una formulazione un po' piú generale. Supponiamo che l'insieme ambiente A abbia n elementi che rappresentano tutti gli eventi elementari possibili, e supponiamo sempre che

tutti questi eventi elementari abbiano la stessa probabilità. (L'insieme A rappresenta l'*esperimento* che ci interessa).

Supponiamo che un evento sia rappresentato da un sottoinsieme B e che un altro sia rappresentato da un sottoinsieme C. Allora la probabilità che si verifichino *entrambi* è data da $\frac{\text{num.}\,(B \cap C)}{n}$; la probabilità che si verifichi *almeno uno* dei due è data, ricordando la formula (1), dall'espressione:

$$\frac{\text{num.}\,(B \cup C)}{n} =$$

$$= \frac{\text{num.}\,(B) + \text{num.}\,(C) - \text{num.}\,(B \cap C)}{n} =$$

$$= \frac{\text{num.}\,(B)}{n} + \frac{\text{num.}\,(C)}{n} - \frac{\text{num.}\,(B \cap C)}{n}$$

Ma $\frac{\text{num.}\,(B)}{n}$ è la probabilità del primo evento, $\frac{\text{num.}\,(C)}{n}$ è la probabilità del secondo evento, e, come abbiamo detto ora, $\frac{\text{num.}\,(B \cap C)}{n}$ è la probabilità che si verifichino entrambi.

Dunque la nostra formula può essere letta in modo espressivo cosí:

La probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi assegnati è data dalla somma delle probabilità di ciascuno, diminuita della probabilità che si verifichino entrambi.

Supponiamo, in particolare, che i due eventi siano *disgiunti*, cioè non possano verificarsi entrambi: ciò significa che la probabilità che si verifichino entrambi è 0. (In questo caso si ha $B \cap C = \varnothing$

cioè gli insiemi B e C che rappresentano i due eventi sono tra loro *disgiunti*). Allora la probabilità che si verifichi uno dei due è data dalla somma delle probabilità. Ma bisogna stare ben attenti e non applicare la « regola della somma » se gli eventi non sono disgiunti!

Facciamo ancora un esempio. Estraiamo una pallina della tombola (come si sa, le palline della tombola sono 90, numerate da 1 a 90). Quale è la probabilità che un numero estratto sia un multiplo di 3? Contando i multipli di 3, si vede che sono 30, perciò la probabilità è $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$. Quale è la probabilità che un numero estratto sia multiplo di 10? Evidentemente è $\frac{1}{10}$.

Quale è la probabilità che un numero sia multiplo di 3 **e** di 10?

L'insieme dei multipli di 3 e di 10, che è l'intersezione dei due insiemi considerati prima, è: $\{30, 60, 90\}$. La probabilità di estrarre un numero multiplo di 3 e di 10 è allora: $\frac{3}{90} = \frac{1}{30}$. La probabilità di estrarre un numero che sia multiplo di 3 **o** di 10, in base alla formula trovata, è:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{10+3-1}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

Supponiamo ora che, sempre nell'ambiente A, un evento sia rappresentato da un sottoinsieme B; consideriamo l'evento **contrario,** cioè quello che costituisce la *negazione* dell'evento assegnato. Esso sarà rappresentato dall'insieme B', complementare di B. Vogliamo calcolare la probabilità di questo evento contrario; dalla formula (3) ricaviamo, dividendo per num. $(A) = n$,

$$\frac{\text{num.}(B')}{n} = \frac{\text{num.}(A)}{n} - \frac{\text{num.}(B)}{n} =$$

$$= 1 - \frac{\text{num.}(B)}{n}$$

Dunque, *la probabilità dell'evento contrario è data da* 1 *diminuito della probabilità dell'evento assegnato.*

Per capire bene questa formula, dobbiamo ricordare che 1 è la probabilità dell'*evento certo.*

Ad esempio, poiché, lanciando un dado, la probabilità di ottenere un numero divisibile per 3 è $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, posso senz'altro affermare che la probabilità di ottenere un numero *non* divisibile per 3 è $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Vocaboli e simboli

insieme **intersezione:** $\cap$ (e)
» **unione:** $\cup$ (o)
» **complementare** (non)
» **differenza:** $\setminus$
insiemi (ed eventi) **disgiunti**
insieme **finito**
» **infinito**
evento **contrario**
$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (insieme degli interi naturali)

Esercizi

1 Tizio e Caio sono amici: Tizio è libero il lunedí, mercoledí, sabato e domenica. Caio è libero il martedí, mercoledí, venerdí e domenica. Quando possono trovarsi?
Come rappresenteresti l'insieme dei giorni possibili?

2 In una classe ci sono 25 alunni (insieme ambiente A): 15 frequentano il Centro Sportivo (sottoinsieme B), 9 la Scuola Musicale (sottoinsieme C), 5 non frequentano né il Centro Sportivo né la Scuola Musicale. Rappresenta la situazione con un grafico insiemistico: quanti insiemi disgiunti vedi? Rappresentali mediante le lettere introdotte, usando le operazioni insiemistiche. Quale è la probabilità che un allievo scelto a caso frequenti sia il Centro Sportivo che la Scuola Musicale?

3 Sia $\mathbf{N}$ l'insieme degli interi naturali: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ e sia B il sottoinsieme formato dai multipli di 2, C il sottoinsieme formato dai multipli di 3. Cerca di descrivere gli insiemi $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbf{N} \setminus (B \cap C)$.

4 In un sacchetto ci sono 15 palline: 7 rosse, 4 azzurre, 4 nere. Quale è la probabilità di estrarre una pallina che non sia rossa? Quale è la probabilità di estrarre una che sia rossa o nera?

5 Un'inchiesta condotta in un liceo ha rivelato questi dati: il 30 % degli allievi ama la matematica, il 60 % ama la filosofia, il 20 % ama sia la matematica che la filosofia. Preso un allievo a caso, qual è la probabilità che egli ami la matematica o la filosofia? che egli non ami né la matematica né la filosofia?

6 Qual è la probabilità che in un'estrazione alla tombola si ottenga un numero:

divisibile per 8 e per 5;
divisibile per 8 o per 5;
quadrato perfetto?

4

Arriva Cartesio ...

4.1 Cominciamo con un problema molto semplice: Petronio possiede due giacche e tre paia di pantaloni. In quanti modi diversi può vestirsi?

Il prodotto cartesiano; significato probabilistico

La soluzione è banale *, ma a noi interessa soprattutto cercare delle utili schematizzazioni per illustrarla.

Sono dati i due insiemi:

l'insieme delle giacche $A = \{m , b\}$ (marrone, blu);

l'insieme dei pantaloni $B = \{v , r , g\}$ (verdi, rossi, gialli).

Possiamo pensare che Petronio proceda per successive scelte.

Ad esempio, prima sceglie la giacca e poi i pantaloni. Queste successive scelte si indicano bene con un *grafo*, cioè con uno schizzo come quello in figura, in cui i vari rami che si biforcano da un vertice rappresentano le varie possibilità che si presentano.

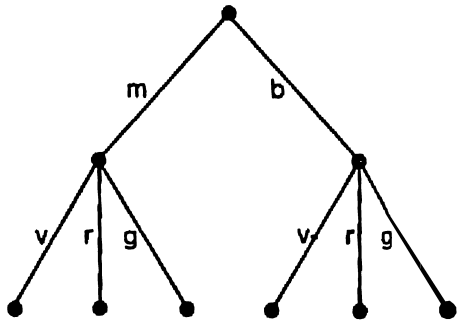


Fig. 1

Naturalmente la scelta può essere fatta anche in senso inverso, come mostra in modo del tutto evidente la figura 2.

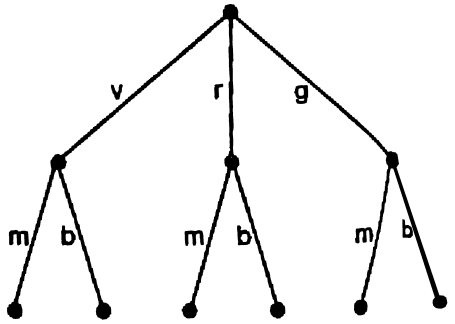


Fig. 2

* Problemini come questi si trovano oggi nei libri di testo della prima elementare e servono per introdurre la moltiplicazione.

Questi tipi di grafo sono detti « ad albero » per evidenti ragioni (anche se, nelle nostre figure, si tratta di alberi che tendono i rami verso il basso...).

In ogni caso, qualunque sia stato il procedimento seguito, ci siamo resi conto che si trattava di trovare tutte le possibili **coppie** (x, y), dove x è preso nell'insieme A ed y nell'insieme B. Quando si dice coppia, s'intende che c'è un ordine fra i due elementi: (x, y) ed (y, x) non sono la stessa coppia, a meno che non sia $x = y$. Ad esempio: $(3, 2)$ e $(2, 3)$ non sono la stessa coppia. *In altre parole, l'uguaglianza* $(x, y) = (a, b)$ *si verifica se e solo se* $x = a$, $y = b$. I due elementi che compaiono nella coppia vengono anche detti **coordinate: prima coordinata e seconda coordinata.** Diamo allora questa importante definizione:

Si dice **prodotto cartesiano*** *di due insiemi* A, B *l'insieme formato da tutte le possibili coppie* (x, y) *con* x *preso in* A *ed* y *in* B.

Il prodotto cartesiano di A per B si indica con $A \times B$.

Dunque, nel problema che ci siamo posti, si trattava di trovare il prodotto cartesiano dei due insiemi $A = \{m, b\}$ e $B = \{v, r, g\}$. Gli elementi del prodotto cartesiano, cioè le coppie, possono essere rappresentate con una **tabella rettangolare** (che si chiama anche, con termine piú tecnico, **matrice**), in cui le coppie di una stessa **colonna** hanno in comune la prima coordinata e le coppie di una stessa **riga** (orizzontale) hanno in comune la seconda coordinata. Per individuare il prodotto cartesiano, basta anche scrivere una tabella a doppia entrata, cosí (cfr. fig. 4):

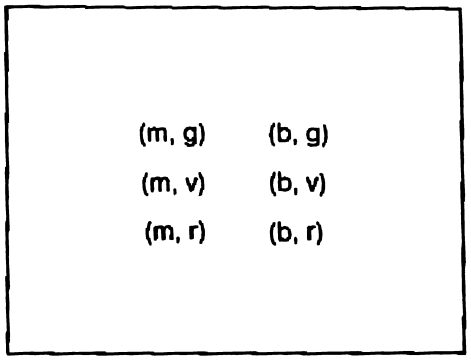


Fig. 3

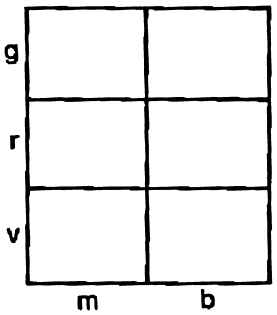


Fig. 4

* Dal nome del celebre filosofo e matematico Cartesio (1596-1650), che introdusse i ben noti « assi cartesiani » per rappresentare i punti del piano mediante coppie di numeri (che sono detti *coordinate* del punto). L'insieme di tutte queste coppie è appunto un prodotto cartesiano secondo la definizione che abbiamo introdotto. Ma di tutto questo ci occuperemo ampiamente piú avanti.

dove è appunto sottinteso che nella casella all'incrocio della colonna x con la riga y si trova la coppia (x, y), secondo lo schema della figura 5.

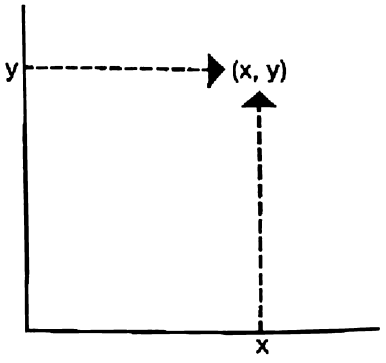


Fig. 5

Ritorniamo ora ai vestiti di Petronio e supponiamo che egli faccia la sua scelta come nella figura 1, però procedendo completamente a caso, senza preferenze. Dapprima egli sceglie m oppure b con probabilità $\frac{1}{2}$, poi procede ad una nuova scelta, sempre a caso, e senza preferenze; non tiene neppure conto del modo con cui ha fatto la prima scelta: non gli importa nulla andare in giro con la giacca blu e i pantaloni verdi. Allora è chiaro che i tre eventi (m, v) (m, r) (m, g) devono avere probabilità uguali e che la somma di queste probabilità deve essere uguale alla probabilità di m, che è $\frac{1}{2}$. Dunque, ciascuno di questi eventi ha probabilità $\frac{1}{6}$. Lo stesso vale per gli eventi (b, v) (b, r) (b, g).

4.2 Consideriamo ora un'altra situazione, piú interessante: il lancio di due dadi. Possiamo pensare che il primo sia rosso, il secondo bianco, per distinguerli. L'insieme di tutte le coppie di facce che possono presentarsi è evidentemente il prodotto cartesiano di un insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ per un insieme $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ simile ad esso (quanto al colore basterà pensare che esso deve essere rosso per il primo elemento di ciascuna coppia, bianco per il secondo).

Alcuni esempi importanti

6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

Fig. 6

Supponiamo che i due dadi vengano lanciati (è la stessa cosa che vengano lanciati assieme, oppure uno dopo l'altro: tanto ciascun dado ignora quello che fa l'altro...). Per il primo dado vi sono 6 possibilità (di uguale probabilità); per ciascuna di esse, il secondo dado ne offre 6 (di uguale probabilità); quindi tutti i 36 eventi possibili (rappre-

sentati dalle 36 coppie) hanno la stessa probabilità, cioè $\frac{1}{36}$.

Poniamoci ora alcuni semplici problemi:

a) Qual è la probabilità che i due dadi presentino lo stesso numero?

Le coppie che hanno due numeri uguali sono 6, esse sono situate nella **diagonale principale** della nostra tabella. La probabilità è perciò

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b) Qual è la probabilità che i due numeri sorteggiati siano il 3 e il 2?

Notiamo che *non si dice in che ordine i numeri si devono presentare:* ci sono allora due coppie, cioè due eventi elementari, che vanno bene: (3 , 2) e (2 , 3).

Dunque la probabilità è $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Invece la probabilità che si presenti due volte il numero 3 è $\frac{1}{36}$, essendovi solo la coppia (3 , 3).

c) Qual è la probabilità che il numero del primo dado sia maggiore del numero del secondo?

Le coppie che interessano sono quelle che stanno *al di sotto* della « diagonale principale »: si vede subito che esse sono in numero di $1 + 2 + 3 + 4 + 5$. Del resto, si può anche ragionare senza la figura, così. Le coppie che interessano sono:

le coppie $(x, 1)$ con $x > 1$,
cioè $x = 2, 3, 4, 5, 6$: in tutto 5

le coppie $(x, 2)$ con $x > 2$,
cioè $x = 3, 4, 5, 6$: in tutto 4

le coppie $(x, 3)$ con $x > 3$,
cioè $x = 4, 5, 6$: in tutto 3

le coppie $(x, 4)$ con $x > 4$,
cioè $x = 5, 6$: in tutto 2

le coppie $(x, 5)$ con $x > 5$,
ne esiste una sola con $x = 6$.

Dunque la probabilità cercata è

$$\frac{1+2+3+4+5}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

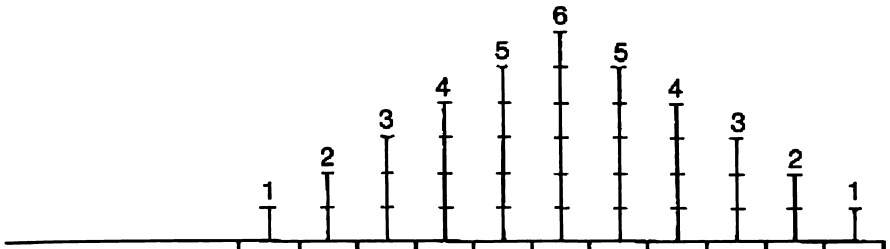
d) Qual è la probabilità che, sommando i punti fatti dai due dadi, si ottenga un numero fissato?

Domandiamoci dapprima quanti casi sono possibili: è chiaro che può uscire un qualsiasi intero compreso fra 2 e 12. L'intuizione ci dice subito che il risultato 2 e il risultato 12 sono piuttosto rari, mentre i risultati intermedi sono assai piú frequenti.

Nella figura 7 abbiamo scritto, al posto di ciascuna coppia la somma dei due numeri: abbiamo fatto cosí una *tavola dell'addizione* (per i numeri da 1 a 6 solamente; è analoga alla «tavola pitagorica», che, come si sa, è una tavola della moltiplicazione). La tabella ci presenta la soluzione del nostro problema in modo evidente: le 36 coppie si ripartiscono, in base alla somma dei punti, come indica il diagramma della figura 8. Riportiamo sotto le relative probabilità (che, naturalmente, si ottengono dividendo per 36).

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Fig. 7



somma dei punti	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilità	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Fig. 8

e) Domandiamoci ora: qual è la probabilità che, lanciando due dadi, la somma dei punti sia un numero pari? Evidentemente è $\frac{2(1+3+5)}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. La probabilità di ottenere un numero dispari deve essere anch'essa $\frac{1}{2}$, ed effettivamente si ha $\frac{2(2+4)+6}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Il risultato è cosí semplice che ci viene il sospetto di poterlo ottenere con un discorso molto piú rapido.

Ecco come si può fare: sappiamo già che lanciando un solo dado la probabilità di ottenere un numero dispari è uguale alla probabilità di ottenere un numero pari, cioè $\frac{1}{2}$. Possiamo dunque pensare di realizzare con il primo dado un esperimento che consta di due soli eventi elementari, entrambi di probabilità $\frac{1}{2}$: pari (p) e dispari (d); cosí pure con il secondo dado. Basta allora tenere presente che la somma di due numeri pari e di due numeri dispari è pari, la somma di un numero pari ed un numero dispari è dispari. In due caselle su 4 avremo una somma pari,

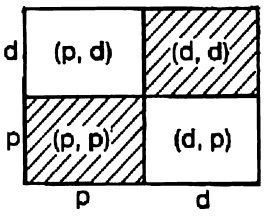


Fig. 9

nelle altre due, somme dispari. Entrambe le probabilità sono $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

4.3 Ora giochiamo alla battaglia navale. Per semplicità prendiamo una tabella piú piccola di quella usuale, con 5 colonne (numerate da 1 a 5) e 7 righe (contrassegnate con le lettere dell'alfabeto, da *a* a *g*). Evidentemente la nostra tabella si può vedere come un prodotto cartesiano:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

Una casella è individuata da una coppia, come: $(3, e)$, $(2, b)$, ecc. Consideriamo ora una « portaerei » piazzata come in figura. Evidentemente si ha:

$$P = \{3, 4\} \times \{b, c, d\}$$

Supponiamo che un giocatore « spari » a caso tentando di colpire la portaerei; evidentemente, la probabilità di colpirla è $\frac{6}{35}$. Vogliamo però seguire un procedimento che ci permetta di ottenere il risultato in modo piú ragionato e piú interessante. Supponiamo che il giocatore proceda attraverso due scelte successive, fra loro indipendenti, e cioè fissi la prima coordinata estraendo a sorte (con uguale probabilità) un numero nell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e poi estragga a sorte la seconda coordinata fra le lettere $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Nella prima scelta ha probabilità $\frac{2}{5}$ di azzeccare, perché i casi favorevoli sono 2 su 5. Nella seconda scelta vi sono 3 casi favorevoli su 7; dunque, passando dalla prima alla seconda scelta, i casi possibili diventano $5 \cdot 7$ (perché ogni

Esperimenti indipendenti; la regola del prodotto

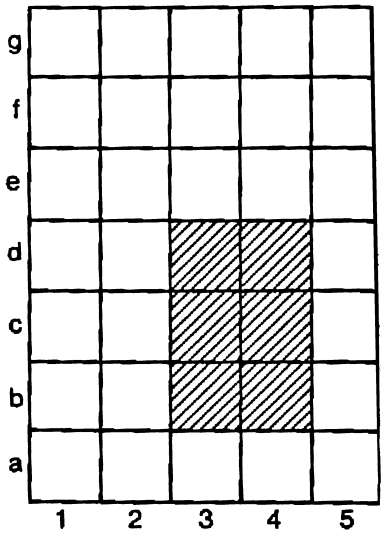


Fig. 10

caso si spezza in 7 casi, di uguale probabilità), i casi favorevoli diventano $2 \cdot 3$, analogamente.

Dunque, la probabilità è:

$$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$$

A conclusione abbiamo trovato il seguente risultato.

Supponiamo di compiere due **esperimenti indipendenti**; sia A un evento che può verificarsi nel primo esperimento, B un evento che può verificarsi nel secondo.

Allora, *la probabilità che si verifichi A e B è data dal prodotto della probabilità di A per la probabilità di B.*

Per capire bene l'importanza di questa regola (che è detta *regola del prodotto*) dobbiamo tenere presente che, in generale, sapendo le probabilità di A e di B non è possibile determinare la probabilità di A **e** B. Ad esempio: supponiamo che in un sacchetto vi siano due palline, di eguale forma: una di legno ed una di plastica, una dipinta in rosso ed una in azzurro. Qual è la probabilità di estrarne una che sia di legno e sia rossa? Non lo posso dire: occorrerebbe sapere se è stata dipinta in rosso la pallina di legno o quella di plastica. Non si può dire che il colore e la materia siano indipendenti, in questo caso, perché ad una materia (legno o plastica) corrisponde un solo colore.

Altra sarebbe la situazione se io avessi due sacchetti: nel primo due palline, di cui mi interessa solo la materia (legno o plastica), nel secondo due palline (rossa o azzurra), e se facessi un'estrazione da ciascun sacchetto. In questo caso avrei due esperimenti indipendenti, che potrei rappresentare con un prodotto cartesiano, e potrei subito calcolare

la probabilità (evidentemente sarebbe $\frac{1}{4}$ per ciascuna delle coppie: materia-colore).

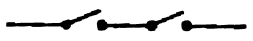
In questi primi capitoli abbiamo trovato un nuovo significato ed un nuovo impiego per le frazioni, che conoscevamo già da tempo. Oltre che ad indicarci come suddividere una torta o un segmento, le frazioni servono a rappresentare una probabilità. Abbiamo già trovato i seguenti concetti: frazioni equivalenti, disuguaglianza tra frazioni, somma di frazioni (attenzione! per sommare le probabilità, accertarsi che si tratti di eventi *disgiunti*), prodotto di frazioni (attenzione! la regola del prodotto riguarda esperimenti *indipendenti*!)

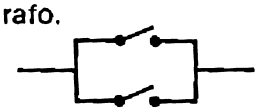
Vocaboli e simboli

coppia (x, y)
coordinate (prima e seconda)
prodotto cartesiano: $A \times B$
tabella rettangolare (o matrice)
righe, colonne
diagonale principale
esperimenti indipendenti

Esercizi

1 Lanciando due monete, quale è la probabilità che una almeno dia «Testa»?

2 a) si collegano due interruttori così:  (cioè «in serie») In quali casi passa corrente? Fare il grafo.

b) si collegano due interruttori così:  (cioè «in parallelo»). In quali casi passa corrente? Fare il grafo.

Supponendo che vi sia probabilità $\frac{1}{2}$ per ciascun interruttore di essere chiuso (o aperto senza alcuna dipendenza fra i due interruttori) quale è la probabilità che passi corrente?

3 Problema analogo al precedente, con tre interruttori in serie e tre in parallelo.

4 Due amici abitano in due diverse frazioni di un paese e si recano al paese una volta alla settimana, a caso, sempre alla stessa ora. Che probabilità hanno di incontrarsi?

5 Due cacciatori bravi (che non sbagliano mai il bersaglio!) vanno a caccia assieme. Passano due fagiani e ciascuno spara ad un fagiano, a caso. Quale è la probabilità che un fagiano si salvi? (Lo sparo di ciascun cacciatore è un esperimento, con due risultati...).

6 Un missile è fatto di due stadi. Il primo stadio fallisce una volta su 7, il secondo una volta su 3. Quale è la probabilità che un lancio riesca? (Si intende che riesce solo quando entrambi gli stadi funzionano).

7 Sia S l'insieme delle squadre di calcio della serie A. Indicando con (a, b) la partita di a contro b giocata in casa della squadra a, quale sottoinsieme di $S \times S$ rappresenta l'insieme di tutte le partite del campionato? Qual è il numero di queste partite e quello delle corrispondenti «domeniche sportive»?

8 Due giocatori giocano a «pari o dispari» con le dita di una sola mano. (Ognuno deve mettere fuori almeno un dito: si fa la somma e si vede se è pari o dispari). Conviene puntare sul «pari» o sul «dispari»?

9 Una cuoca (non troppo esperta) prepara il pranzo. Vi è la probabilità $\frac{1}{10}$ che la minestra risulti troppo salata, la probabilità $\frac{1}{5}$ che risulti insipida. Inoltre, si può valutare $\frac{1}{7}$ la probabilità che l'arrosto si bruci. Quale è la probabilità che il pranzo riesca bene?

5

Probabilità con piú disinvoltura ...

5.1 Come abbiamo preannunciato, la nozione di probabilità può essere impiegata in situazioni piú generali di quelle considerate finora.

La moneta asimmetrica

Esponiamo alcuni esempi molto interessanti.

Consideriamo dapprima il lancio di una « moneta asimmetrica »: possiamo chiamare cosí, ad esempio, il coperchio di un barattolo di marmellata. Confrontiamolo con una moneta ordinaria; questa ha un piano di simmetria, la cui sezione è rappresentata dalla linea tratteggiata nella figura 1 , *a*); la simmetria appunto trasforma una faccia della moneta nell'altra e perciò non c'è motivo di attribuire ad una faccia probabilità diversa dall'altra nel lancio. Invece il coperchio del barattolo, che è rappresentato in sezione nella figura 1 , *b*), non possiede questo piano di simmetria. Possiamo chiamare convenzionalmente « Testa » (T) la faccia con la scritta, « Croce » (C) la faccia interna. Non sappiamo assegnare **a priori** la probabilità di T e di C; eventualmente, facendo una numerosa serie di lanci, potremo fare una valutazione attendibile. Poiché il coperchio è piú pesante dalla parte di T, potremo attenderci che la probabilità di C sia maggiore di quella di T. Supponiamo che:

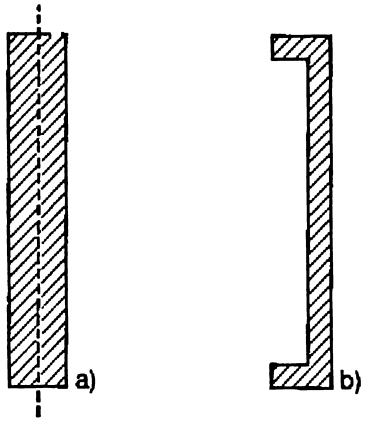


Fig. 1

la probabilità di T sia 0,3; la probabilità di C sia 0,7 (in ogni caso, la somma delle probabilità deve essere 1 perché T e C sono i due soli eventi possibili, e sono disgiunti!). Lanciamo ora due volte la nostra « moneta asimmetrica ». Il grafo della

figura 2 ci dice quali sono i casi possibili, e come sono le varie probabilità.

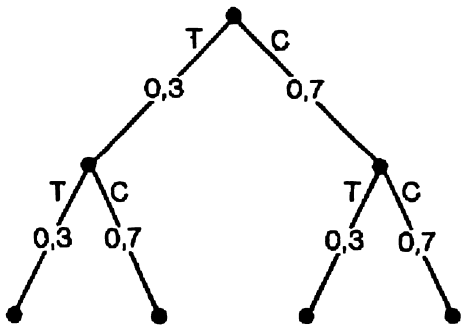


Fig. 2

Qui su ogni arco del grafo è indicata la probabilità del relativo evento; dobbiamo fornire questa indicazione perché ora non intendiamo piú, come abbiamo fatto nelle lezioni precedenti, che i rami uscenti dallo stesso vertice rappresentino eventi di uguale probabilità. Anzi, ci rendiamo conto, proprio pensando alla « moneta asimmetrica », che *non c'è affatto bisogno che gli eventi elementari abbiano tutti la stessa probabilità.* (È però essenziale che siano disgiunti e che la somma delle probabilità sia sempre 1).

La figura 2 ci aiuta a calcolare le probabilità dei vari eventi che sono possibili, sempre applicando la regola del prodotto. L'esperimento del doppio lancio si può descrivere cosí:

la probabilità di $T\ T$ è $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$
» » » $T\ C$ è $0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$
» » » $C\ T$ è $0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$
» » » $C\ C$ è $0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$

Constatiamo che la somma di tutte queste probabilità è 1. D'ora in poi, il termine esperimento indicherà non solo l'insieme degli eventi elementari, ma anche le corrispondenti probabilità (che possono essere diverse fra loro).

5.2 Vediamo ora come la nozione di probabilità si possa applicare anche a questioni di carattere sociale. Come si sa, la statistica è la scienza dei fatti sociali espressi con termini numerici, onde studiare lo sviluppo dei vari fenomeni. Si dicono appunto statistiche i dati rilevati. Vi sono persone (magari anche uomini politici...) che hanno in uggia le statistiche. Le statistiche possono essere uggiose, ma sono necessarie se vogliamo affrontare razionalmente i problemi delle collettività

Probabilità desunta dalle statistiche

umane; per fare politica in modo corretto sarebbe necessario, piú che fare lunghi discorsi senza senso, conoscere bene la statistica, l'economia ecc. (oltre che, naturalmente, la morale).

Il primo compito che si prefigge la statistica è quello di fare dei rilevamenti; nel caso delle popolazioni umane, i rilevamenti si fanno attraverso l'ufficio anagrafe dei comuni e attraverso altri uffici pubblici. Supponiamo ora che in un certo Stato il rilevamento abbia dato questi risultati:

Su 100 000 ragazzi, vivi all'età di 10 anni, 86 000 raggiungano l'età di 40 anni e 50 000 l'età di 70 anni.

Domandiamoci ora:

Qual è la probabilità che ha un ragazzo di 10 anni di arrivare a 40 anni?

Qual è la probabilità che ha un ragazzo di 10 anni di arrivare a 70 anni?

Evidentemente, la prima probabilità è 0,86, la seconda è 0,50. Ora, domandiamoci: quale è la probabilità che ha un uomo di 40 anni di raggiungere i 70 anni?

È chiaro che la probabilità deve essere computata considerando l'insieme degli 86 000 quarantenni e mettendo in evidenza, fra questi, il sottoinsieme formato dai 50 000 che raggiungono i 70 anni.

Dunque la probabilità di questo evento è $\frac{50}{86}$.

Notiamo che la valutazione della probabilità di un evento dipende spesso dalle informazioni che abbiamo; la probabilità di arrivare a 70 anni è 0,50 riferita all'età di 10 anni; ma se sappiamo che un soggetto ha già superato la barriera dei 40 anni, allora la sua probabilità di arrivare ai

70 è maggiore $\left(\text{è infatti } \frac{50}{86} > \frac{50}{100}\right)$. La situazione della popolazione può essere descritta dal grafo della figura 3, con evidente significato.

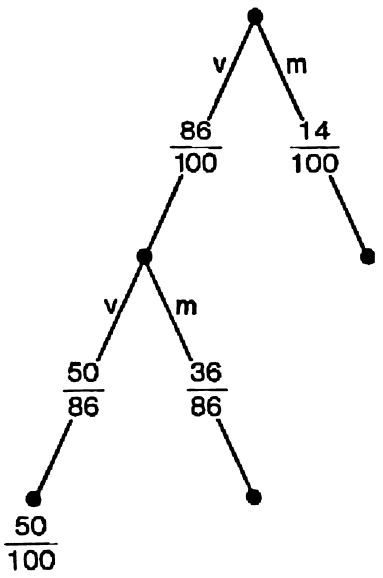


Fig. 3

Notiamo che vale sempre la regola del prodotto: la probabilità di arrivare a 70 anni è uguale alla probabilità di arrivare a 40 anni, moltiplicata per la probabilità che si ha di arrivare ai 70, una volta arrivati ai 40:

$$\frac{86}{100} \cdot \frac{50}{86} = \frac{50}{100}$$

5.3 Facciamo ora un altro esempio, in cui la probabilità varia « strada facendo ». Riprendiamo il nostro solito sacchetto contenente tre palline rosse e 2 azzurre. Estraiamo una pallina, e poi una seconda senza rimettere nel sacchetto quella già estratta. Naturalmente, le probabilità nella seconda estrazione dipendono dal risultato della prima: se la prima estratta è rossa, ne rimangono 2 rosse e due azzurre $\left(\text{e le probabilità sono } \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; se la prima estratta è azzurra, ne rimangono 3 rosse ed una azzurra $\left(\text{e le probabilità sono } \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

L'impiego dei grafi

Costruiamo un grafo (fig. 4): su ogni ramo segniamo la probabilità dell'evento rappresentato (uscita della pallina rossa o di quella azzurra, in una determinata circostanza). Ora vogliamo calcolare le probabilità dei quattro eventi elementari: (r, r) (r, a) (a, r) (a, a). Ciascuno di essi è rappresentato da un cammino formato da due rami consecutivi del grafo. Supponiamo, ad esempio che nella prima estrazione esca la pallina azzurra (evento di probabilità $\frac{2}{5}$) ; con la seconda estrazione

questo evento si spezza in due eventi disgiunti: (a, r), (a, a). La somma delle probabilità di questi deve risultare $\frac{2}{5}$; le probabilità devono essere proporzionali al numero delle palline di ciascun colore che sono presenti: 3 ed 1 rispettivamente. Allora:

l'evento (a, r) ha probabilità $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

l'evento (a, a) ha probabilità $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

Analogamente:

l'evento (r, r) ha probabilità $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

l'evento (r, a) ha probabilità $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

Possiamo concludere così: anche se le due successive estrazioni non sono esperimenti indipendenti, si applica la regola del prodotto, in questo senso:

la probabilità di un evento rappresentato da un cammino del grafo è uguale al prodotto delle probabilità associate ai rami che lo compongono.

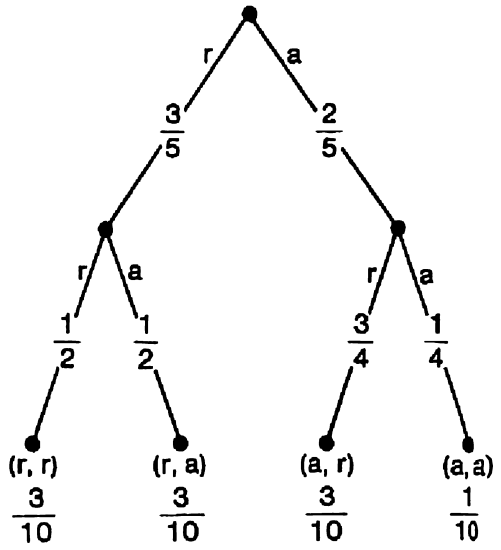


Fig. 4

5.4 Tutti conoscono il « gioco dell'oca ». Vi è una successione di caselle numerate: 1 , 2 , 3 , 4 , ... il lancio del dado assegna il numero dei passi che ciascun giocatore deve compiere. Supponiamo che nella casella 3 vi sia una « prigione », e domandiamoci: qual è la probabilità di incapparvi? Naturalmente, si incappa nella prigione se, al primo lancio, esce il 3; ma vi sono anche altre eventualità: fare al primo lancio 2 e al secondo 1, oppure al primo 1 e al secondo 2, oppure fare 1 in tre lanci consecutivi. Queste varie possibilità sono illustrate dal grafo della figura 5 (che *non* è ad albero).

Un ulteriore esempio

Qui abbiamo segnato soltanto i rami relativi ad eventi che ci interessano (ad esempio, non ab-

biamo rappresentato l'uscita del 4, 5, 6 al primo lancio, dal momento che, in questi casi, la «prigione» è subito evitata). Abbiamo messo una freccia nei rami per sottolineare come si evolve la situazione in un lancio.

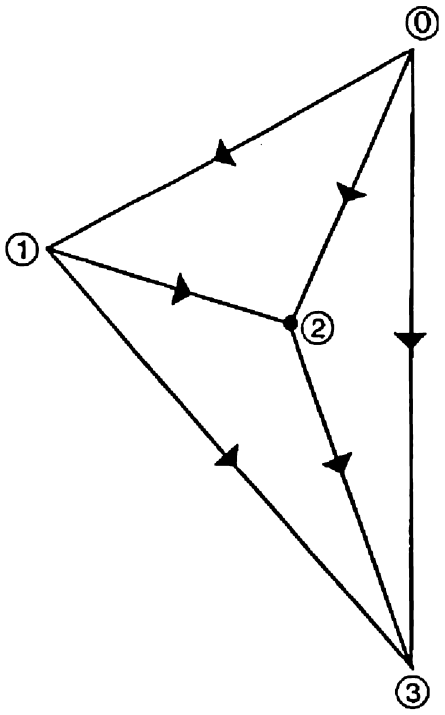


Fig. 5

Dunque, la probabilità cercata è:

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{36}+\frac{1}{216}=\frac{49}{216}$$

Vocaboli e simboli

a priori: si dice di un'affermazione fatta sulla base di una congettura o di una teoria, prima di una verifica sperimentale.

Esercizi

1 In un sacchetto vi sono 7 palline rosse ed 8 azzurre. Estraendo due palline, successivamente, senza rimettere la prima nel sacchetto, quali sono le probabilità degli eventi che possono presentarsi?

2 Lanciamo una moneta simmetrica (indichiamo con t, c gli eventi «testa» e «croce») ed una moneta asimmetrica (indichiamo con T, C gli eventi «Testa» e «Croce»). Quale è la probabilità dell'evento t e T, oppure c e C? (Indichiamo con p e q le probabilità di T e C: si troverà poi che nel risultato finale p e q non compaiono). Fare un grafo.

3 Una scatola contiene tre lampadine elettriche fulminate e sette buone. Se ne prendono tre a caso. Quale è la probabilità che una lampadina almeno sia buona? Disegnare il grafo e calcolare le probabilità dei vari risultati.

4 In uno Stato vi sono due fabbriche di transistors. La prima produce il 70 % dell'intera produzione, l'altra il 30 %. La prima produce l'80 % di transistors «ottimi», la seconda ne produce solo il 70 %. Quale è la probabilità che un transistor acquistato a caso sia «ottimo»?

5 Due sacchetti, esternamente uguali, contengono: il primo 5 palline bianche e 3 rosse, il secondo 4 palline rosse e 2 verdi. Estraendo una pallina da uno dei due sacchetti, scelto a caso, quale è la probabilità che essa sia bianca, rossa, verde?

6 In una fabbrica vi sono tre macchine automatiche. La probabilità che esse richiedano l'intervento di un operaio durante un'ora è 0,1 , 0,2 , 0,15, rispettivamente. Quale è la probabilità che nessuna richieda l'intervento dell'operaio?

6

Arriva Pascal ...

6.1 Lanciamo una, due, tre volte una moneta. Gli eventi possibili sono rappresentati dai vari cammini di un grafo ad albero (fig. 1). Essi possono essere elencati cosí, indicando con T «Testa» e con C «Croce»:

Prove ripetute e numeri di Pascal

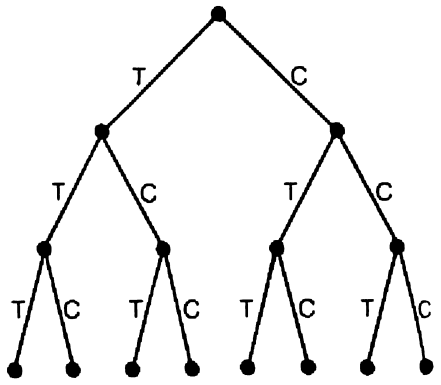


Fig. 1

$T\ T\ T$ $\quad$ $C\ T\ T$
$T\ T\ C$ $\quad$ $C\ T\ C$
$T\ C\ T$ $\quad$ $C\ C\ T$
$T\ C\ C$ $\quad$ $C\ C\ C$

In tutto sono $8 = 2^3$. In generale, gli eventi elementari che si possono verificare nel lancio di una moneta n volte sono 2^n: infatti per $n = 1$ sono 2: T, C, e ad ogni lancio il numero degli eventi precedentemente elencati viene raddoppiato.

Chiediamoci ora quale è la probabilità che, in tre lanci di una moneta (simmetrica), esca 2 volte T ed una volta C, non importa in quale ordine. L'evento che interessa si realizza nei 3 seguenti casi elementari: $T\,T\,C$, $T\,C\,T$, $C\,T\,T$.

Dunque la probabilità cercata è $\frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$.

In generale, consideriamo ora il caso di n lanci: ci chiediamo *in quanti casi* (*cioè in quanti eventi elementari*) T *si presenta* m *volte* (*essendo, natural-*

mente, $0 \leq m \leq n$) *e, ovviamente, C si presenta* $n - m$ *volte.* A questo scopo, conviene fare ricorso ad un tipo di grafo, piú espressivo, che non è piú « ad albero ». In questo grafo, i cammini diversi che arrivano ad uno stesso vertice contengono uno stesso numero di T e di C, in ordine diverso. Ad esempio (vedi fig. 2), per $n = 3$, il vertice che corrisponde a « 2 volte T ed una volta C » (che è segnato con un asterisco), viene raggiunto attraverso 3 cammini.

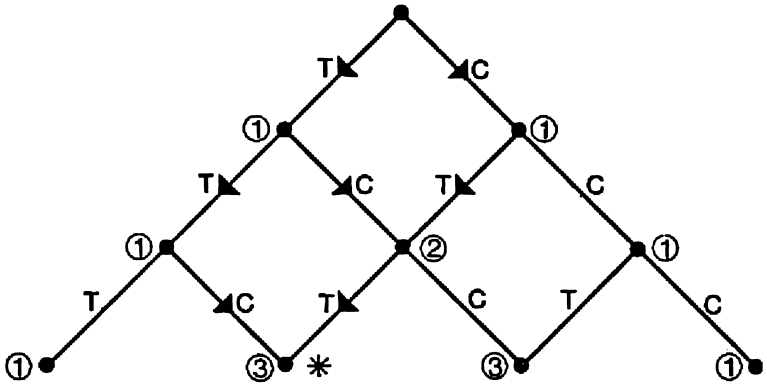


Fig. 2

Possiamo allora fare immediatamente un'osservazione di carattere generale: in un grafo di questo tipo, i cammini che arrivano ad un certo vertice che non sia il primo o l'ultimo di una riga vi arrivano solo da uno dei due vertici che lo sovrastano: quindi *il numero totale dei cammini che arrivano ad un vertice è dato dalla somma dei cammini che arrivano ai due vertici che lo sovrastano.*

Questa osservazione ci dà modo di calcolare meccanicamente il numero dei cammini.

I numeri qui scritti si chiamano **numeri di Pascal** * ; il numero di Pascal m-simo nella riga

* Blaise Pascal (1623-1662), filosofo e matematico, fu uno dei pensatori piú profondi e affascinanti di tutti i tempi. Fu uno dei fondatori del calcolo delle probabilità. Qualcuno sostiene che altri matematici (come l'italiano Tartaglia) abbiano scoperto il « triangolo » (cfr. fig. 3) prima di Pascal. Ma sembra che i Cinesi lo conoscessero già da tempo. La cosa interessante per noi è che Pascal applicò questi numeri al calcolo delle probabilità.

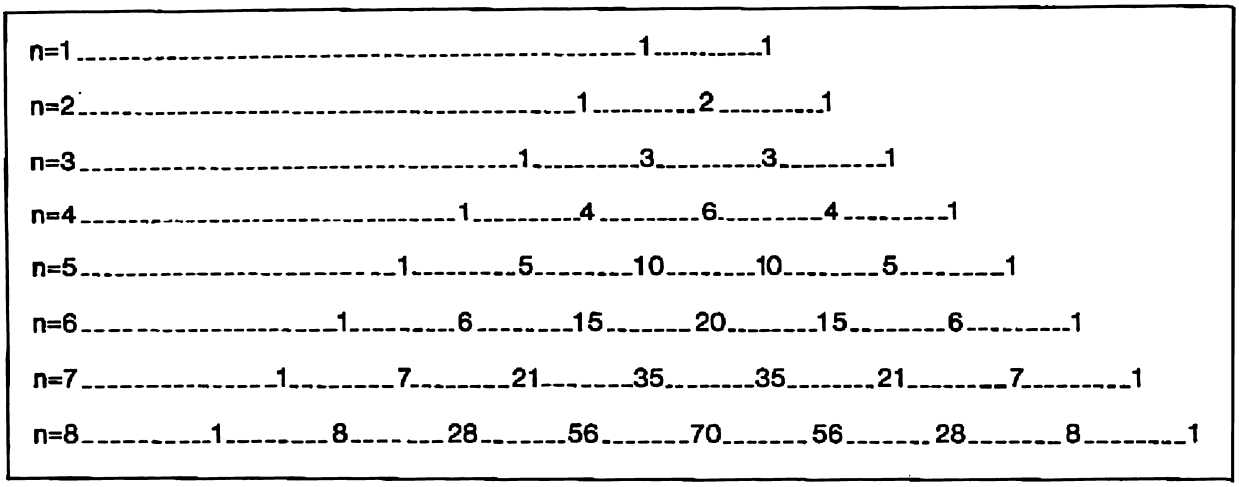


Fig. 3

n-sima viene indicato col simbolo $\binom{n}{m}$. Occorre fare bene attenzione: nella riga n-sima, l'indice m varia crescendo dal valore 0 (che corrisponde al caso in cui C compare 0 volte e T compare n volte) fino al valore n (che corrisponde al caso in cui C compare n volte e T non compare); dunque i numeri di Pascal della riga n-sima sono $n+1$. Abbiamo detto che ogni numero di Pascal, tranne il primo e l'ultimo di ciascuna riga (che sono sempre uguali ad 1), si ottiene mediante la somma dei due che lo sovrastano.

Questo si può esprimere con la seguente formula:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \text{ (dove è } 0 < m < n)$$

Domandiamoci, ad esempio: qual è la probabilità che, *lanciando 7 volte una moneta, compaia 3 volte C (e 4 volte T)?*

L'evento cercato si realizza con un numero di eventi elementari (cioè cammini) dato da $\binom{7}{3}$.

Leggiamo la nostra tabella: si ha $\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35$.

Dunque, la probabilità cercata è $\frac{35}{2^7} = \frac{35}{128}$.

È facile risolvere problemi analoghi relativi al caso di una moneta asimmetrica, in cui l'evento T abbia una probabilità p e l'evento C una probabilità q (naturalmente, sarà $p + q = 1$). Consideriamo, ad esempio, l'evento rappresentato dal cammino: $T\,C\,T\,T\,C$ $(n = 5\,,\, m = 2)$; la probabilità di questo cammino è, per la regola del prodotto, $pqppq = p^3q^2$. Questa probabilità *non dipende dall'ordine con cui seguono i T e i C*, ma solo *dal numero delle volte in cui compaiono.*

Dunque, la probabilità di ottenere in 5 lanci 3 volte T e 2 volte C (non importa in quale ordine) è data da $\binom{5}{2} p^3\, q^2 = 10\, p^3\, q^2$.

6.2 Risolviamo ancora un piccolo problema: la pianta di una città è come nella figura 4; le linee orizzontali e verticali rappresentano le vie (numerate a partire da 0); gli incroci sono individuati da una coppia di numeri.

Una passeggiata a caso

Un turista parte dal punto $Q = (0\,,\,0)$; ad ogni incrocio egli va, a caso, verso est oppure verso nord (lanciando una monetina).

Qual è la probabilità che egli passi per il punto $P = (4\,,\,3)$?

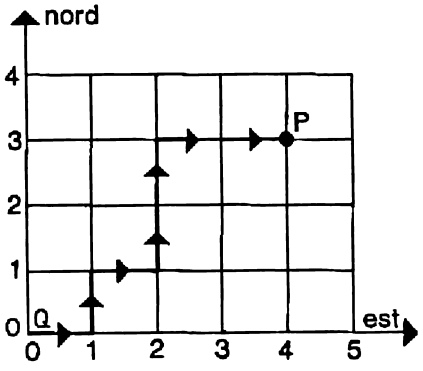


Fig. 4

La situazione è solo in apparenza diversa da quella che abbiamo considerato prima; in realtà, basta intendere che T significhi « tratto verso est » e C « tratto verso nord ». Del resto, la figura 4 non è altro che la figura 2 ruotata! (Possiamo osservare, in linea generale, che uno dei vantaggi piú forti che ci dà una formazione matematica, è

quello di riconoscere che, in molti casi, situazioni all'apparenza diverse hanno una stessa struttura astratta e possono essere chiarite con lo stesso ragionamento). Nel nostro caso, dunque, il numero delle strade che arrivano a P è dato $\binom{4+3}{3} = \binom{7}{3} = 35$, e la probabilità è $\frac{35}{2^7} = \frac{35}{128}$.

6.3 I numeri di Pascal hanno un altro significato molto interessante che ora vogliamo presentare. Consideriamo, ad esempio, il numero $\binom{5}{2}$: esso rappresenta il numero dei diversi modi con cui, in un esperimento di 5 lanci di una moneta, può risultare tre volte «Testa» e due volte «Croce». Come possiamo rappresentare queste successive estrazioni? Supponiamo di avere cinque caselle vuote in fila: due di queste caselle possono essere riempite con un C, in tutti i modi possibili. (È ovvio che le altre 3 caselle saranno riempite con un T). La situazione è allora quella illustrata dallo schizzo qui accanto. Possiamo concludere che $\binom{5}{2}$ esprime il numero dei sottoinsiemi di 2 elementi che si possono prendere in un insieme di 5 elementi. Sarebbe lo stesso prendere i sottoinsiemi di tre elementi: infatti, basta pensare alle caselle non occupate dai C, in cui dobbiamo pensare che vi siano i T. Quello che abbiamo scoperto ha valore generale: *il numero di Pascal* $\binom{n}{m}$ (con $0 \leq m \leq n$) *rappresenta il numero dei diversi sottoinsiemi di m elementi che si possono prendere in un insieme di n elementi.*

I numeri di Pascal e i sottoinsiemi

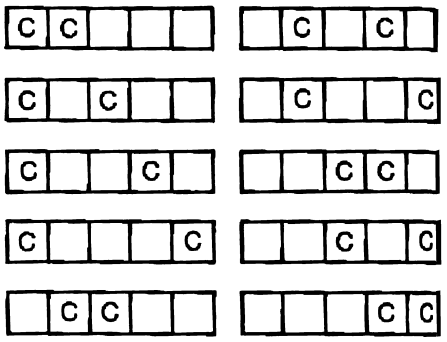


Fig. 5

Per questo motivo $\binom{n}{m}$ viene detto anche numero delle **combinazioni di n elementi di classe m**.

Il ragionamento fatto ci ha anche mostrato chiaramente che è $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$, come già si poteva vedere dalla simmetria della nostra tabella triangolare (vedi fig. 3).

Applichiamo subito questa nostra scoperta a qualche problemino di probabilità. Da un mazzo di 10 carte, numerate da 1 a 10, estraiamo a caso 5 carte; qual è la probabilità che le carte estratte siano: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$? (non importa in quale ordine). Evidentemente, i casi possibili nell'estrazione sono tanti quanti i sottoinsiemi di 5 elementi presi da un insieme di 10 elementi, cioè $\binom{10}{5} = 252$. Tutti questi sono equiprobabili, e uno solo è quello favorevole. Dunque la probabilità cercata è $\frac{1}{252}$. Domandiamoci ancora: qual è la probabilità che fra le 5 carte estratte vi siano le carte: 1, 2, 3? Il numero degli eventi elementari è 252; quelli favorevoli si ottengono considerando i sottoinsiemi di 5 elementi che contengono gli elementi: 1, 2, 3; basta allora tenere presente che per ottenere questi sottoinsiemi si devono aggiungere altre due carte e che queste vanno prese nell'insieme $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Dunque il numero di questi sottoinsiemi è $\binom{7}{2} = 21$. La probabilità cercata è $\frac{21}{252} = \frac{1}{12}$. Per la risoluzione di questo problemino non si sarebbe sbagliato ad analizzare tutti i casi possibili via via mediante un grafo: ma la cosa sarebbe stata eccessivamente lunga e complicata.

6.4 Nel proseguimento dei nostri studi matematici, avremo occasione piú volte di incontrare i numeri di Pascal, che hanno tante interessanti proprietà.

Alcuni esempi interessanti

Intanto vediamo qualche altro problema probabilistico che richiede l'uso dei numeri di Pascal.

a) Da un sacchetto che contiene 3 palline rosse e 2 azzurre si fanno 10 estrazioni, rimettendo sempre nel sacchetto la pallina estratta: quale è la probabilità di estrarre esattamente 6 volte la pallina rossa?

Siamo in una situazione che si può benissimo identificare con quella della « moneta asimmetrica », abbiamo due soli eventi possibili (disgiunti): $r\left(\text{con probabilità } \frac{3}{5}\right)$ ed $a\left(\text{con probabilità } \frac{2}{5}\right)$.

La probabilità cercata è $P = \binom{10}{6}\left(\frac{3}{5}\right)^6\left(\frac{2}{5}\right)^4$. Si tratta, in primo luogo, di calcolare $\binom{10}{6}$; prolungando la tabella della figura 3, si ricava: $\binom{10}{6} = 210$. Dunque è

$$P = 210\,\frac{3^6\,2^4}{5^{10}} = 210\,\frac{3^6\,2^{14}}{10^{10}} = 21\,\frac{3^6\,2^{14}}{10^9}$$

a questo punto, non c'è che da fare i calcoli. Si trova: 0,250822656. Naturalmente, per scopi pratici si potranno tagliare via molte di queste cifre decimali.

Negli studi che faremo in futuro, troveremo anche metodi di calcolo assai piú rapidi per espressioni in cui compaiano potenze piuttosto elevate, come nel caso visto.

b) Una sonda spaziale trasmette a terra segnali in codice binario $\{0, 1\}$. Questi vengono ricevuti, ma, a motivo della grande distanza e dei disturbi della trasmissione, non sempre vengono interpretati correttamente. Noi facciamo questa ipotesi:

se il segnale è 1, vi è probabilità $0{,}8 = \frac{4}{5}$ che esso venga interpretato come 1, e vi è probabilità $0{,}2 = \frac{1}{5}$, che esso venga interpretato come 0. Analogamente per il segnale 0.

Per avere una trasmissione piú sicura, la radio della sonda è programmata in modo da ripetere il segnale 5 volte. A terra il segnale viene interpretato «a maggioranza» (cioè viene letto 1 se la maggioranza dei 5 segnali è 1, 0 se la maggioranza è 0).

Quale è la probabilità che il segnale cosí ripetuto venga interpretato in modo errato?

Il segnale è interpretato in modo errato quando 5, oppure 4, oppure 3 dei segnali parziali sono interpretati in modo errato. La probabilità allora è

$$P = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^4\frac{4}{5} + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{5^5} + \frac{5\cdot 4}{5^5} + \frac{10\cdot 4^2}{5^5} =$$

$$= \frac{2^5 + 5\cdot 4\cdot 2^5 + 10\cdot 4^2\cdot 2^5}{10^5} =$$

$$= \frac{32 + 640 + 5120}{10^5} = 0{,}05792$$

Si vede dunque che la probabilità di errore è diventata molto piccola.

c) Due giocatori, che sono stimati di pari abilità, conducono una gara che consta di 7 partite successive.

Quale è la probabilità che si abbia la vittoria di uno sull'altro per un solo punto?

Si tratta di valutare la probabilità dell'evento:
«4 a 3, oppure 3 a 4». La probabilità è

$$\left[\binom{7}{3}+\binom{7}{4}\right]\frac{1}{2^7}=\frac{70}{128}=\frac{35}{64}$$

Vocaboli e simboli

numeri di Pascal:

$\binom{n}{m}$ numero delle **combinazioni di n elementi di classe m.**

Esercizi

1 Un quadrigetto compie la traversata dell'Atlantico. La probabilità che un motore si blocchi si può valutare $\frac{1}{200}$; perché l'aereo arrivi a destinazione basta che almeno due motori funzionino regolarmente. Quale è la probabilità che l'aereo non arrivi a destinazione?
(Indicare l'espressione esatta della probabilità e poi darne una valutazione approssimata con un po' di buonsenso).

2 Riprendere l'esercizio 3) della 5ª lezione (quello delle 10 lampadine di cui 7 buone e 3 guaste) e risolverlo con un nuovo metodo, rispondendo a queste domande: in quanti modi diversi si possono prendere 3 lampadine nel mucchio di 10? In quanti modi diversi se ne possono prendere 3 guaste?

3 Alcibiade si trova nel punto centrale di Corso Italia; si muove in uno dei due sensi a caso, e passeggia per 10 metri. Si ferma a chiacchierare e poi di nuovo riparte scegliendo la direzione a caso; così fa in tutto per 6 volte.
Disegnare su una retta i punti in cui può trovarsi alla fine, con le relative probabilità, e fare anche un istogramma delle probabilità (si scelgano due unità di misura convenienti, affinché il disegno risulti espressivo).
(Questo problema può sembrare nuovo, ma è molto simile ad altri già considerati: possiamo pensare che ogni volta Alcibiade scelga la direzione lanciando una monetina...).

4 All'alba di Capodanno, quattro amici, uscendo un po' alticci dal club «Bacchus», riprendono a caso i loro cappotti.
Quale è la probabilità che ciascuno riabbia il suo?

5 Si fanno 4 lanci con un dado. Quale è la probabilità che esca esattamente 3 volte un numero ≤ 2?

6 Si mettono a caso 6 oggetti in 4 cassetti. Quale è la probabilità che in un cassetto fissato ne cadano 2? Fare il calcolo approssimato con due cifre decimali.

7 Una fabbrica ha bisogno di 10 operai per funzionare. La probabilità che un operaio non si presenti al lavoro è 0,1. Se gli operai assunti dalla fabbrica sono 11, quale è la probabilità che essa possa funzionare?

7

L'utilità dei fannulloni

Come conclusione di questo primo ciclo di lezioni dedicato al calcolo delle probabilità, riportiamo due celebri problemi che risalgono alle origini di questa scienza.

Un problema probabilistico di Galilei

7.1 Cominciamo con il problema contenuto nello scritto *Considerazioni di Galileo Galilei* * *sopra il gioco dei dadi.* Il gioco di cui si parla è quello con tre dadi, allora molto in voga, in cui si puntava sulla somma dei numeri estratti. Era stato fatto presente a Galileo che il 10 compariva piú spesso del 9; questo appariva strano, perché sia il 9 che il 10 vengono ottenuti con 6 diversi raggruppamenti di tre numeri:

per il 9: [6,2,1], [5,3,1], [5,2,2], [4,4,1], [4,3,2], [3,3,3]

per il 10: [6,3,1], [6,2,2], [5,4,1], [5,3,2], [4,4,2], [4,3,3]

Galileo si accorse che non sempre due diversi raggruppamenti hanno la stessa probabilità. Si tratta di un'osservazione importante che noi abbiamo fatto nel § 4.2: abbiamo notato che, nel caso del lancio di due dadi, la probabilità del

* G. Galilei (1564-1642) fu lo scopritore delle leggi della meccanica ed uno dei fondatori della scienza moderna. Uomo di grande autonomia di pensiero, capace di vedere l'essenziale delle cose, con grande acutezza e semplicità. Anche in campo matematico fece osservazioni di straordinaria originalità.

raggruppamento [1 , 1] è $\frac{1}{36}$, mentre la probabilità del raggruppamento [1 , 2] è $\frac{1}{18}$, perché esso si realizza sia con la coppia (1 , 2) che con la coppia (2 , 1). In altre parole, nel caso del lancio di due dadi gli eventi elementari equiprobabili sono le coppie di numeri; nel caso del lancio di tre dadi sono le terne di numeri.

Si tratta allora di vedere con quante terne si possono attuare i raggruppamenti che fanno uscire il 9 e il 10.

Un raggruppamento di tre numeri diversi, come [6 , 2 , 1] si realizza in 6 modi diversi, come si può vedere con il grafo, qui accanto. Se dei tre numeri due sono uguali fra loro, il raggruppamento si realizza in 3 modi diversi (ad esempio, per [5 , 2 , 2] sono le terne (5 , 2 , 2), (2 , 5 , 2), (2 , 2 , 5)). Tenendo conto che il numero degli eventi elementari (cioè delle terne) è $6^3 = 216$. possiamo facilmente calcolare le probabilità cercate:

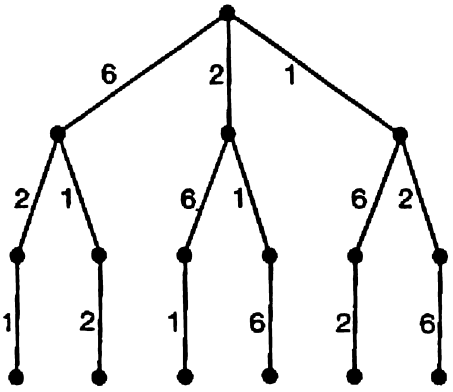


Fig. 1

Il 9 *si realizza con* $6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$ *terne, e perciò*

la sua probabilità è $\frac{25}{216}$.

Il 10 *si realizza con* $6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27$ *terne, e perciò*

la sua probabilità è $\frac{27}{216}$.

La differenza fra le due probabilità è piccola ed è veramente singolare che essa sia stata notata: dovevano essere giocatori incalliti coloro che la

segnalarono a Galileo! Questa circostanza è stata veramente fortunata per la scienza; così, per opera di Galileo, un problema di probabilità fu per la prima volta inquadrato e risolto.

7.2 Era certamente un giocatore incallito, oltre che uomo di ingegno, quel Cavaliere di Méré che nel 1654 propose a Pascal il bizzarro problema che ora esponiamo.

Un problema probabilistico di Pascal

Si tratta di questo: due giocatori di pari abilità (possiamo supporre che ciascuno abbia probabilità $\frac{1}{2}$ di vincere, come in un usuale gioco d'azzardo) disputano una serie di partite. Vince il gioco chi per primo totalizza 4 vincite nelle partite. Ma, prima di concludere il gioco, decidono di non proseguire e di ripartire la posta nel modo piú giusto possibile, tenendo conto della situazione del gioco. Supponiamo, ad esempio, che al momento della sospensione il primo giocatore abbia vinto una partita ed il secondo 2; supponiamo che la posta sia di 64 scudi. Come deve essere ripartita? È chiaro che deve essere ripartita in proporzione alla probabilità che hanno di vincere *al momento della sospensione:* bisogna dunque calcolare questa probabilità, li può aiutare il solito grafo a maglie quadrate che abbiamo usato nella lezione precedente, a proposito della pianta di una città. I punti d'incrocio (o nodi) rappresentano una possibile situazione del gioco: ad esempio, il punto (3, 2) rappresenta la situazione in cui il primo giocatore ha vinto 3 partite, il secondo 2. Se nella successiva partita vince il primo giocatore, il punto si sposta a destra di un tratto, se vince il secondo giocatore, il punto si sposta in alto di un tratto.

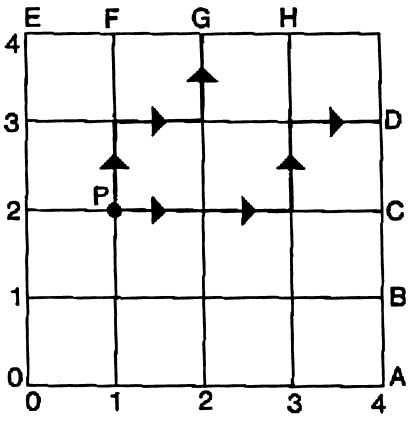


Fig. 2

Il gioco viene concluso quando il punteggio del primo o del secondo giocatore arriva a 4, cioè quando la linea spezzata che rappresenta il gioco arriva ad uno dei quattro punti A, B, C, D (con vittoria del primo giocatore) oppure E, F, G, H (con vittoria del secondo). Nel caso del nostro problema, si parte dal punto $P = (1, 2)$:

si tratta di contare il numero dei cammini, notando che, per la regola del prodotto, ad ogni tratto la probabilità viene moltiplicata per $\frac{1}{2}$.

Dal punto P possiamo arrivare solo ai punti F, G, H, D, C; notiamo che a questi punti finali si arriva solo da una direzione. Ad esempio, non si arriva a G da F perché quando la spezzata arriva a F il gioco è finito.

Per arrivare ad F c'è un unico cammino, di 2 tratti, quindi la probabilità è: $\frac{1}{4}$

Per arrivare a G ci sono 2 cammini, di 3 tratti, quindi la probabilità è $\frac{2}{2^3}$, cioè: $\frac{1}{4}$

Per arrivare ad H ci sono 3 cammini, di 4 tratti, quindi la probabilità è $\frac{3}{2^4}$, cioè: $\frac{3}{16}$

In totale la probabilità di vincita del secondo giocatore è

$$\frac{4+4+3}{16} = \frac{11}{16}$$

Per controllo, calcoliamo esplicitamente la probabilità di riuscita del primo giocatore:

Per arrivare a C c'è un solo cammino di 3 tratti, quindi la probabilità è $\frac{1}{2^3}$, cioè: $\frac{1}{8}$

Per arrivare a D ci sono 3 cammini di 4 tratti, quindi la probabilità è $\frac{3}{2^4}$, cioè: $\frac{3}{16}$

In totale la probabilità di vincita del primo giocatore è

$$\frac{2+3}{16} = \frac{5}{16}$$

La somma delle probabilità è dunque 1, come doveva essere.

I 64 scudi della posta devono essere cosí divisi:

Al primo giocatore: $64 \cdot \frac{5}{16} = 20$ scudi

Al secondo giocatore: $64 \cdot \frac{11}{16} = 44$ scudi

Per concludere, tanto i fannulloni giocatori di dadi amici di Galileo, quanto il Cavaliere di Méré amico di Pascal furono molto utili alla scienza; ma lo furono perché si imbatterono in uomini, come Galileo e Pascal, geniali e tutt'altro che fannulloni.

Variabili aleatorie e valori medi

7.3 Il gioco che abbiamo studiato ora ci dà l'occasione di interessanti considerazioni. La durata del gioco non è fissa: il gioco può durare da 4 a 7 partite. Possiamo chiederci: che durata ha *in media* il gioco? Ma prima dobbiamo chiederci che cosa significa esattamente «in media». Non avrebbe senso, ad esempio, prendere la media aritmetica fra 4 (durata minima) e 7 (durata massima), cioè 5,5. Infatti occorre tenere conto che, ad esempio, il caso di una durata di 4 partite è meno probabile, e si verifica in generale piú raramente degli altri: c'è da aspettarsi che la durata media che si riscontra in una lunga serie di giochi sia superiore a 5,5 partite. Per avere la durata media, sarà ragionevole moltiplicare i numeri 4, 5, 6, 7 per le rispettive probabilità e sommare i numeri ottenuti. Infatti, compiendo una lunga serie di prove, c'è da aspettarsi che i vari eventi si verifichino con una fre-

quenza relativa proporzionale alla rispettiva probabilità, come si è visto nella 2ª lezione.

Calcoliamo dunque le probabilità dei risultati possibili — naturalmente, supponendo di partire dal punto (0, 0) — Cominciamo col calcolare le strade che arrivano ad un certo punto: procederemo allora come nel calcolo dei numeri di Pascal, ma occorre poi tenere presente che ai punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *H*, *G* si arriva da una sola via. I numeri dei cammini sono scritti entro cerchietti nella figura 3.

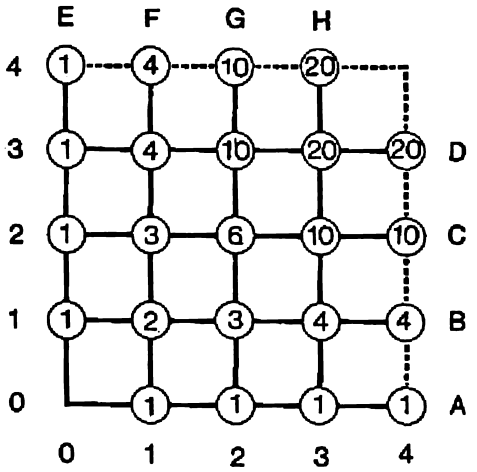


Fig. 3

Per calcolare la probabilità bisogna poi sempre tenere conto del numero dei tratti di ogni cammino (cioè del numero delle partite rappresentate in ogni cammino) e applicare la regola del prodotto.

Abbiamo allora il seguente prospetto:

Probabilità di un gioco di 4 *partite (cioè di arrivo in A o in E)*: $2 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{8}$

Probabilità di un gioco di 5 *partite (cioè di arrivo in B o in F)*: $2 \cdot \frac{4}{2^5} = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

Probabilità di un gioco di 6 *partite (cioè di arrivo in C o in G)*: $2 \cdot \frac{10}{2^6} = \frac{5}{16}$

Probabilità di un gioco di 7 *partite (cioè di arrivo in D o in H)*: $2 \cdot \frac{20}{2^7} = \frac{5}{16}$

(Si verifica subito che la somma di queste probabilità è effettivamente 1).

Allora, la durata media della partita è:

$$\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{1}{4}\cdot 5+\frac{5}{16}\cdot 6+\frac{5}{16}\cdot 7=\frac{93}{16}\simeq 5{,}81$$

Nella seconda lezione avevamo già parlato di *guadagno medio:* ora, con l'esempio appena svolto, siamo in grado di estendere questa nozione ad un ambito molto piú generale. Supponiamo assegnato un certo esperimento, cioè tutti i possibili eventi elementari e le relative probabilità. Supponiamo che ad ogni evento si faccia corrispondere un numero, dipendente dal particolare evento. (Nel nostro esempio, questo numero era la durata del gioco). Questo numero, che può variare da evento ad evento, viene detto **variabile aleatoria.** Allora si dice **valore medio della variabile aleatoria la somma dei prodotti dei suoi valori per le rispettive probabilità.** Facendo molte prove e prendendo le medie dei valori che si ottengono volta per volta, c'è da aspettarsi di trovare un valore molto vicino al valore medio della variabile aleatoria.

Vocaboli e simboli

Variabile aleatoria
Valore medio di una variabile aleatoria

Esercizi

1 Cerco un oggetto che si trova nascosto in uno fra 5 cassetti. In media, quanti cassetti dovrò aprire per averlo?

2 Un cacciatore colpisce il bersaglio, in media, 8 volte su 10.
Il suo fucile ha 4 colpi ed egli continua a sparare finché non ha colpito il bersaglio e finché, naturalmente, ha colpi da sparare. In media, quanti colpi spara? (Fare prima il grafo).

3 Si lanci 4 volte un dado: quale è la probabilità che esca il 6 esattamente due volte? (Attenzione: gli eventi che interessano sono solo due: «6» e «non-6»).

4 In un grande mucchio di mele, l'80 % sono guaste. Quante devo prenderne,

a caso per avere probabilità maggiore di $\frac{99}{100}$ che una almeno sia buona?
(Essendo il mucchio grande, la probabilità di estrarre una mela guasta rimane praticamente uguale a 0,8 anche dopo avere tolto qualche mela).

5 Una cuoca compera 12 uova; un uovo non è buono. Se deve fare una frittata di due uova, quale è la probabilità che le basti rompere due uova, quale è la probabilità che ne debba rompere tre? Fare il grafo. In media, quante uova rompe la cuoca?

6 In un comitato si devono scegliere a sorte 3 persone. I candidati sono 6 ragazzi e 4 ragazze. Descrivere la situazione con un grafo. In media, quante ragazze ci saranno nel comitato?

I seguenti esercizi non riguardano il calcolo delle probabilità: sono esercizi di vario tipo che presuppongono semplici nozioni imparate nella scuola media. D'ora innanzi, gli esercizi non si riferiranno solo alla materia appena imparata, ma a tutte le cose che si sono studiate. Molte volte, poi, piú che sapere o ricordare, sarà forse necessario fare funzionare il cervello!
Segneremo con un asterisco gli esercrzi un po' difficili, con due asterischi gli esercizi particolarmente difficili, che sarà bene affrontare solo dopo aver risolto gli altri.

7 Un datore di lavoro, in un momento critico per la sua azienda, diminuisce la paga dei suoi dipendenti del 30 %; passata la crisi, aumenta la paga del 30 %. Quale è la situazione finale dei dipendenti?

8 In una corsa ciclistica della lunghezza di 180 km la giuria stabilisce di non classificare coloro che arrivano dopo 20 minuti dal vincitore. Sapendo che il vincitore ha compiuto il percorso in 5 ore, che cosa si può dire della velocità media dei corridori non classificati?

9 Due cerchi di uguale raggio r sono disposti in modo che il centro dell'uno sta sulla circonferenza dell'altro. Calcolare l'area dell'intersezione.

10 Un automobilista parte e procede con la velocità costante di 80 km/h. Un secondo automobilista parte dopo 10 minuti; quale deve essere la sua velocità per poter superare il primo automobilista entro 100 km?

8

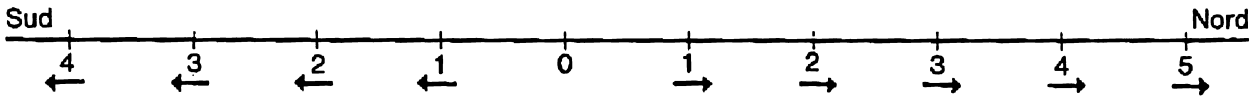
I numeri relativi

8.1 Nelle scuole medie inferiori abbiamo già conosciuto ed impiegato i numeri relativi; ma l'argomento è cosí importante che se ne rende opportuna una ripetizione ben ragionata, anche allo scopo di formulare in modo preciso le proprietà di questi numeri.

Gli interi relativi

Cominciamo da una situazione concreta che ci è familiare.

Supponiamo di trovarci in un punto ben determinato di una lunga strada: per esempio sulla via Aurelia, alla periferia di Pisa. La *posizione* di un'automobile che si trovi sulla via Aurelia non si può stabilire dando soltanto la *distanza* dal punto in cui siamo: se si trova, ad esempio, a 3 km da noi, può essere verso Nord oppure verso Sud. Anche uno *spostamento* può essere compiuto verso Nord o verso Sud. È utile una rappresentazione come questa:



Qui abbiamo disegnato solo i punti che distano un numero intero di chilometri dal punto 0, in cui ci troviamo. Ogni numero ha sotto una freccia che segna la direzione — sempre rispetto al punto 0 — del punto rappresentato. Il punto 0 può essere indifferentemente dotato di una freccia a destra o a sinistra; o può essere scritto senza freccia come abbiamo fatto nel nostro disegno.

I numeri con la freccia sono detti **interi relativi;** essi costituiscono un insieme che indicheremo col simbolo **Z**. Togliendo ad un intero relativo la freccia, si ottiene un numero, cioè un elemento di **N**, che viene detto suo **valore assoluto:** ad esempio, $\overrightarrow{3}$ e $\overleftarrow{3}$ hanno entrambi come valore assoluto 3. Il valore assoluto di un numero a si indica con $|a|$.

Anche gli *spostamenti* lungo la nostra strada (spostamenti verso Nord, oppure verso Sud) possono essere indicati con numeri dotati di freccia, cioè con numeri relativi. Gli spostamenti ci suggeriscono un'operazione molto naturale: l'**addizione.** Ad esempio $\overrightarrow{2} + \overrightarrow{3}$ rappresenta lo spostamento che si ottiene compiendo successivamente uno spostamento verso Nord di 2 km, e poi uno spostamento, ancora verso Nord, di 3 km.

Allora scriveremo:

$$\overrightarrow{2} + \overrightarrow{3} = \overrightarrow{5}$$

Alla stessa maniera, risulta chiaro il significato di queste relazioni:

$$\overleftarrow{4} + \overleftarrow{2} = \overleftarrow{6} \quad , \quad \overleftarrow{3} + \overrightarrow{3} = 0 \quad , \quad \overleftarrow{3} + \overrightarrow{5} = \overrightarrow{2}$$

(L'allievo controlli tutti questi esempi con il disegno).

Negli ultimi due esempi, i due spostamenti non hanno lo stesso verso: come è intuitivo prevale il verso di quello che è piú grande in valore assoluto, e il risultato ha un valore assoluto che è uguale alla differenza fra i valori assoluti (sottraendo, naturalmente, il minore dal maggiore: $5 - 3 = 2$).

Notiamo che si ha, ad esempio:

$$(3 \underset{\rightarrow}{+} 2) \underset{\rightarrow}{+} 7 = 2 \quad , \quad 3 \underset{\rightarrow}{+} (2 \underset{\rightarrow}{+} 7) = 2$$

In questo caso abbiamo verificato la proprietà **associativa.** Vale anche la proprietà **commutativa** dell'addizione, come nel caso:

$$3 \underset{\leftarrow}{+} 4 = 1 = 4 \underset{\leftarrow}{+} 3$$

Queste proprietà, che ora abbiamo verificato in casi particolari, possono essere dimostrate in generale tenendo conto del fatto che esse valgono in **N** (insieme degli interi naturali). Ma se pensiamo agli spostamenti sulla retta, esse risultano del tutto evidenti e perciò non ne daremo la dimostrazione.

Notiamo che esiste un **elemento neutro** per l'addizione, cioè un elemento che, sommato ad un qualsiasi elemento, lo lascia inalterato: è il numero 0 (zero). Infatti, indicando con *a* un qualsiasi numero relativo, si ha:

$$a + 0 = a$$

Definiamo ora l'operazione di **opposto.** Si tratta di un'operazione che agisce su un solo numero (a differenza dell'addizione che coinvolge due numeri). L'operazione **opposto** applicata ad un numero relativo, non fa che invertire il senso della treccia; essa viene indicata col segno —; ad esempio:

$$-(\underset{\rightarrow}{3}) = \underset{\leftarrow}{3} \quad , \quad -(\underset{\leftarrow}{5}) = \underset{\rightarrow}{5}$$

Naturalmente, l'opposto di 0 dovrà essere 0. È chiaro che se *a* è un qualsiasi numero relativo, si ha:

$$-a + a = 0$$

Ad esempio $-\underset{\rightarrow}{3}+\underset{\rightarrow}{3}=0$; infatti è

$$-\underset{\rightarrow}{3}=\underset{\leftarrow}{3}$$

Inoltre *l'opposto dell'opposto di un numero è il numero stesso*:

$$-(-a)=a$$

Questa operazione di **opposto** ci permette di fare una semplificazione nel modo di rappresentare i numeri relativi. Aboliamo, in primo luogo, la freccia per quei numeri che l'hanno rivolta in uno dei due sensi (ad esempio verso destra). Diremo **numeri positivi** questi numeri. Scriveremo dunque 5 in luogo di $\underset{\rightarrow}{5}$, 3 in luogo di $\underset{\rightarrow}{3}$.

È evidente la nostra intenzione di fare in modo che i numeri positivi (con lo zero) si possano considerare a tutti gli effetti come coincidenti con gli interi naturali, che già conoscevamo.

In secondo luogo, terremo presente che i numeri con la freccia a sinistra (numeri negativi) sono gli opposti dei corrispondenti numeri positivi. Ad esempio:

$$\underset{\leftarrow}{5}=-\underset{\rightarrow}{(5)}=-5$$

In questo modo, dunque, i numeri negativi verranno scritti semplicemente mettendo il segno — davanti al loro valore assoluto.

Cosí non avremo piú bisogno delle frecce.

Consideriamo ora l'equazione:

$$a+x=b \qquad (1)$$

dove a e b sono interi relativi assegnati, x è un in-

tero relativo che dobbiamo determinare in modo che l'uguaglianza scritta sia vera. Il termine **equazione** ci è già noto: comunque, avremo piú avanti occasione di riprendere questa importante nozione. Limitiamoci a ricordare che la relazione scritta ci dice che $a + x$ (primo membro) e b (secondo membro) sono due numeri uguali, cioè sono lo stesso numero. È ovvio che aggiungendo uno stesso numero ad entrambi i membri si ottengono ancora due numeri uguali. Aggiungiamo, ad esempio, l'opposto di a, cioè $-a$; ricaviamo:

$$a + x + (-a) = b + (-a)$$

Poiché $a + (-a) = 0$, troviamo:

$$x = b + (-a)$$

Ad esempio, se l'equazione è: $5 + x = 3$, aggiungendo -5 troviamo

$$x = 3 + (-5) = -2$$

Effettivamente, $b + (-a)$ è una soluzione dell'equazione (1), dal momento che sostituendo $b + (-a)$ in luogo di x nella (1) si ricava:

$$a + [b + (-a)] = a + b + (-a) = b$$

e quindi l'equazione (1) risulta verificata. Nel campo degli interi naturali, **N**, l'operazione che risolve la (1) è la sottrazione (ci domandiamo: quanto manca ad a per arrivare a b?). Nell'insieme **N** questa operazione si può compiere solo quando b (minuendo) è maggiore, o, tutt'al piú, uguale ad a (sottraendo). Nel campo dei numeri relativi, invece, questa operazione si può sempre fare senza eccezione e questo è un grosso vantaggio che si ottiene passando ai numeri relativi. Conveniamo di scrivere, d'ora in poi, $b - a$ in luogo di $b + (-a)$; cosí il risultato verrà indicato con il simbolo noto della sottrazione. Ma deve essere chiaro che nel campo dei numeri relativi non c'è bisogno

di introdurre in modo autonomo un'operazione di sottrazione: ci bastano l'addizione e l'operazione di **opposto**.

8.2 Nelle lezioni precedenti abbiamo avuto occasione di ripetere le piú importanti nozioni riguardanti le *frazioni*. Sappiamo che si dice **frazione** un simbolo del tipo $\frac{m}{n}$, dove m ed n sono interi naturali ed è $n \neq 0$. Sappiamo che due frazioni come $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}$ sono fra loro **equivalenti:** esse possono rappresentare la medesima porzione di una stessa grandezza (es.: due pezzi di una torta divisa in tre parti, oppure quattro pezzi di una torta divisa in sei parti). Anche il calcolo delle probabilità ci ha fornito un modello interessante per la nozione di frazioni equivalenti (se due casi sono favorevoli su tre, la probabilità è la stessa che se quattro casi sono favorevoli su sei, ammesso sempre che i casi elementari siano equiprobabili).

I razionali relativi: struttura additiva

Sappiamo che, per regola generale, *due frazioni* $\frac{m}{n}, \frac{r}{s}$ *sono equivalenti se è* $m \cdot s = n \cdot r$.

Diremo che un insieme di frazioni fra loro equivalenti $\left(\text{come, ad es., l'insieme } \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots\right\}\right)$ è un **numero razionale.** Quindi considereremo le frazioni fra loro equivalenti come simboli diversi per rappresentare *lo stesso* numero razionale.

Naturalmente, i numeri interi possono essere visti come particolari numeri razionali. Ad esempio, il numero 5 si può identificare con il numero razionale $\left\{\frac{5}{1}, \frac{10}{2}, \frac{15}{3}, \ldots\right\}$; il numero 0 si può far coincidere con $\left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}\right\}$, il nu-

mero 1 con $\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \ldots\right\}$.

Abbiamo già imparato nelle scuole medie a sommare e a moltiplicare le frazioni: possiamo considerare quelle operazioni come operazioni fra numeri razionali. Anche i numeri razionali possono essere dotati di una freccia, esattamente come si è fatto per gli interi: si ottengono i *numeri razionali relativi*, che possono essere rappresentati su una retta. Indicheremo con **Q** l'insieme dei numeri razionali relativi.

Per i razionali relativi si introducono le stesse operazioni che abbiamo introdotto per gli interi relativi (operazioni di addizione e di « opposto »), e si seguono le stesse convenzioni: ad esempio, si scrive $-\frac{3}{5}$ $\left(\text{opposto di } \frac{3}{5}\right)$ per indicare $\left(\frac{3}{5}\right)$.

Le operazioni di addizione e di « opposto » hanno le seguenti proprietà, che dovremo tenere presenti in modo preciso:

1) *L'addizione gode della proprietà* **associativa,** *che si esprime così*:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Per capire questa proprietà, dobbiamo renderci conto che noi abbiamo definito l'addizione solo per il caso di *due* addendi: perciò il simbolo $a + b + c$ (benché intuitivamente molto chiaro) non ha ancora un significato preciso. Volendo lasciare immutato l'ordine con cui si seguono i tre numeri a, b, c, possiamo interpretarlo come $(a + b) + c$, oppure $a + (b + c)$: ebbene, la proprietà associativa ci dice che queste diverse interpretazioni conducono al medesimo risultato. Quindi la somma di tre (o piú) addendi si può indicare senza parentesi: $a + b + c$.

2) *L'addizione gode della proprietà* **commutativa:**

$$a + b = b + a$$

3) *Esiste un (unico)* **elemento neutro** *per l'addizione: il numero* 0. *Si ha dunque:*

$$a + 0 = a$$

4) *Per ogni numero a c'è un (unico)* **opposto,** *cioè un unico numero,* $-a$, *tale che:*

$$a + (-a) = 0$$

Esercizi

1 Calcolare:

$$-7 + 5\,;\ 3 + (-2)\,;\ \frac{2}{3} + \left(-\frac{3}{5}\right);\ \frac{2}{7} + \left(-\frac{3}{4}\right);\ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

2 Calcolare:

$$1 - \frac{7}{2};\ \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{7}\right);\ \left(2 + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{3}{4} - 5\right);\ \frac{2}{7} - \left[\frac{3}{4} - \left(1 + \frac{3}{2}\right)\right]$$

3 Dimostrare le seguenti relazioni:

$$a + (b + c) = (c + a) + b\,;\quad (a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d)$$

(Queste relazioni sono intuitivamente ovvie: l'interesse sta nel dimostrarle facendo uso solo della proprietà associativa e della proprietà commutativa, attraverso una catena di uguaglianze).

4 Dimostrare che $-(a + b) = (-a) + (-b)$ (cioè l'opposto di una somma è la somma degli opposti).

I razionali relativi: struttura moltiplicativa

8.3 Introdotta l'addizione, vogliamo ora introdurre nell'insieme **Q** dei razionali relativi la seconda operazione algebrica fondamentale: la **moltiplicazione.** A questo punto, occorre fare un passo indietro e ricordare che la moltiplicazione è stata già introdotta nell'insieme dei numeri

razionali assoluti. Ricordiamo che la frazione prodotto di due frazioni ha come denominatore il prodotto dei denominatori e come numeratore il prodotto dei numeratori.

Ad esempio: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$; ricordiamo che ogni numero razionale non nullo ha un reciproco, definito dal fatto che, moltiplicato per il numero dato, dà come risultato 1. Ad esempio, il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$; infatti: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$.

L'operazione di moltiplicazione nell'insieme dei numeri razionali assoluti ha le seguenti proprietà importanti, che esponiamo proseguendo l'elenco già iniziato:

5) *La moltiplicazione gode della proprietà* **associativa,** *che si esprime così*:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

6) *La moltiplicazione gode della proprietà* **commutativa:**

$$a \cdot b = b \cdot a$$

7) *La moltiplicazione ha un (unico)* **elemento neutro,** *che si indica con* 1. *Si ha dunque*:

$$a \cdot 1 = a$$

8) *Ogni numero* **diverso da** 0 *ha un unico* **reciproco** *cioè un numero, che si scrive* $\frac{1}{a}$ *(oppure* $1/a$*), tale che:*

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

9) *Vale la proprietà* **distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione,** *cioè risulta:*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Queste sono le proprietà fondamentali della moltiplicazione nell'insieme dei numeri razionali assoluti. Ora, noi vogliamo *definire* la moltiplicazione nel campo dei razionali relativi in modo tale da soddisfare a queste due condizioni:

I) Nel caso che i due fattori siano numeri razionali positivi, la moltiplicazione deve essere quella che già conosciamo. Ad esempio, $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{7}$ sono numeri razionali assoluti e possono essere considerati numeri razionali positivi. Ebbene: deve risultare $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$ anche nell'ambito dei numeri relativi.

II) Anche nell'ambito dei numeri relativi la moltiplicazione deve avere le proprietà 5), 6), 7), 8), 9).

Anzitutto, notiamo che deve essere $a \cdot 0 = 0$ per ogni numero razionale a. Può sembrare fatica inutile dimostrare questa relazione che, nel caso di un numero a positivo, è del tutto ovvia. Ma l'interesse — tipicamente matematico — sta nel fare vedere che dalle proprietà 1), 2), . . . , 9) si possono dedurre *tutte* le proprietà algebriche di cui abbiamo bisogno per calcolare con i nostri numeri, e perciò anche la relazione $a \cdot 0 = 0$. Per dimostrarla, dunque, partiamo dalla relazione $1 + 0 = 1$. Moltiplicando ambo i membri di questa uguaglianza

per a e tenendo presente che 1 deve essere elemento neutro per la moltiplicazione, si ottiene:

$$a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a$$

Applicando la proprietà distributiva, si ricava:

$$a + a \cdot 0 = a$$

Aggiungiamo ora ad ambo i membri l'opposto di a:

$$(-a) + a + a \cdot 0 = (-a) + a$$

Essendo $(-a) + a = 0$, si ricava $a \cdot 0 = 0$, come volevamo dimostrare.

Vediamo ora quale deve essere il prodotto di un numero positivo per un numero negativo; ad esempio: $3 \cdot (-2)$. Teniamo presente che $2 + (-2) = 0$; allora, moltiplicando per 3 ambo i membri:

$$3 \cdot [2 + (-2)] = 3 \cdot 0 = 0$$

D'altra parte, applicando la proprietà distributiva, deve essere:

$$3 \cdot 2 + 3(-2) = 0$$

Ma questa relazione ci dice che $3 \cdot (-2)$ è uguale all'opposto di $3 \cdot 2$; infatti, se due numeri hanno per somma 0, ciascuno di essi è l'opposto dell'altro, per la proprietà 4). Dunque deve essere:

$$3 \cdot (-2) = -(3 \cdot 2) = -6$$

Siamo dunque indotti a fissare questa regola:

Il prodotto di un numero positivo per uno negativo è un numero negativo che ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti.

Vogliamo ora definire il prodotto di due numeri negativi; ad esempio: $(-3)\cdot(-2)$.

Si procede come prima; dalla relazione $2+(-2)=0$, moltiplicando membro a membro per -3, si ha:

$$(-3)\cdot[2+(-2)]=0$$

e, applicando la proprietà distributiva:

$$(-3)\cdot 2+(-3)\cdot(-2)=0$$

Questa relazione ci dice che $(-3)\cdot(-2)$ deve essere l'opposto di $(-3)\cdot 2$, il quale, come abbiamo visto, deve essere l'opposto di $3\cdot 2$. Ma l'opposto dell'opposto di un numero è il numero stesso: perciò si deve porre

$$(-3)\cdot(-2)=3\cdot 2=6$$

Dunque, siamo obbligati a porre la seguente regola:

Il prodotto di due numeri negativi è un numero positivo uguale al prodotto dei valori assoluti.

Questa regola può sembrare paradossale, ma diventa ben comprensibile se si riflette alla proprietà

dell'operazione « opposto » a cui abbiamo fatto ricorso. Comunque, per capirla meglio, riprendiamo l'esempio della via Aurelia, fatto all'inizio. Risulta naturale esprimere anche le velocità con numeri relativi: una velocità positiva indicherà un moto verso Nord, una velocità negativa un moto verso Sud. Supponiamo che un'automobile si trovi al tempo 0 esattamente a Pisa e si muova con la velocità costante di 80 km/h. Tra $\frac{1}{2}$ ora si troverà a 40 km verso Nord, cioè nel punto che abbiamo contrassegnato col numero 40, fra un'ora nel punto 80, ecc.

Domandiamoci: quale è il punto corrispondente al tempo -1? Il tempo -1 ha un significato preciso: un'ora fa. Evidentemente, la posizione corrispondente dell'automobile è contrassegnata da -80 (cioè 80 km a Sud): $(-1) \cdot 80 = -80$.

Supponiamo di invertire la velocità, cioè di considerare un'automobile che si muove con la velocità di -80 km/h (80 km/h verso Sud). Domandiamoci: ammesso che al tempo 0 l'automobile si trovi a Pisa, dove si trovava al tempo -1, cioè un'ora fa? Evidentemente, a 80 km da Pisa, in direzione Nord. E tutto torna bene con la nostra regola: $(-80) \cdot (-1) = 80$. Dunque, le regole che abbiamo dato per la moltiplicazione permettono di verificare in ogni caso la « legge del moto uniforme »: $s = vt$ (s: spazio percorso, v: velocità, t: tempo).

Abbiamo definito la moltiplicazione fra numeri relativi in modo da verificare ancora le proprietà 5), 6), 7), 8), 9). Occorrerebbe accertare che lo scopo è stato effettivamente raggiunto. La verifica non è difficile, ma un po' noiosa, e noi la tralasceremo.

Notiamo che l'operazione di « opposto » può essere vista come operazione di moltiplicazione per -1. È, ancora una volta, la proprietà distributiva che ce lo dice. Infatti, partiamo dalla relazione

$1 + (-1) = 0$. Moltiplicando membro a membro per a ed usando la proprietà distributiva, si ha $a + (-1)\, a = 0$; questa relazione ci dice che $(-1)\, a$ è proprio l'opposto di a, cioè $-a$.

È interessante confrontare le proprietà 1), 2), 3), 4) relative all'addizione e all'operazione di « opposto » con la proprietà 5), 6), 7), 8) relative alla moltiplicazione e all'operazione di « reciproco ». C'è una perfetta analogia: soltanto, *per l'esistenza dell'inverso di un elemento a c'è una condizione: deve essere* $a \neq 0$, mentre per l'esistenza dell'opposto non c'è nessuna condizione. Effettivamente, la condizione $a \neq 0$ è indispensabile per l'esistenza dell'inverso; infatti, essendo $0 \cdot x = 0$ per ogni numero x, non può esserci un x tale che $0 \cdot x = 1$; e ciò significa che *il numero* 0 *non ha inverso.* Questo è un punto importante, che occorre sempre tener presente.

Notiamo che se a e b sono numeri relativi, con $b \neq 0$, si scrive $\frac{a}{b}$, oppure a/b (e si legge: a fratto b, oppure a diviso b) per indicare $\frac{1}{b} \cdot a = a \cdot \frac{1}{b}$.

Notiamo che l'inverso di un prodotto di due numeri diversi da 0 è il prodotto degli inversi, cioè $\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a}$; infatti si ha $\left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot (a \cdot b) =$
$= \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = \frac{1}{b} \cdot 1 \cdot b = \frac{1}{b} \cdot b = 1$

(Osservare l'analogia con l'esercizio 4 del § 8.2).

Vocaboli e simboli

intero relativo
insieme degli interi relativi: Z

valore assoluto
$|x|$ **è il valore assoluto** di x
addizione: si indica con $+$
elemento neutro; zero: 0; **uno:** 1
opposto di a: $-a$
numeri **positivi**
» **negativi**
» **razionali** (assoluti)
insiemi dei numeri **razionali relativi: Q**
moltiplicazione: si indica con $\cdot$
reciproco di a: si indica con $\frac{1}{a}$
proprietà **associativa** (dell'addizione e della moltiplicazione)
proprietà **commutativa** (dell'addizione e della moltiplicazione)
proprietà **distributiva** (della moltiplicazione rispetto all'addizione).

Esercizi

1 Calcolare:

$$\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-3\right]$$

2 Calcolare:

$$\frac{\left(1-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\right)\cdot 3}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}+\frac{-\left(2-\frac{1}{4}\right)}{\left(-\frac{7}{5}\right)+\frac{1}{2}}$$

3 Calcolare:

$$\left(-\frac{3}{4}+2-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{11}+1\right):\left(1+\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-2+\frac{5}{3}\right)$$

4 Calcolare:

$$\left(3+\frac{7}{2}\right)^3;\ \left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\right]^2;\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)^2$$

5 Calcolare:

$$\frac{-\frac{3}{4}-1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-3}-\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)^2 \quad ; \quad \frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} : \frac{-1+\frac{3}{4}}{-2+\frac{5}{4}}$$

6 Dimostrare che se $a \cdot b = 0$, allora uno almeno dei due fattori a e b deve essere uguale a zero. (Si proceda così: supponiamo che a sia $\neq 0$ e cerchiamo di provare che è $b = 0$: se è $a \neq 0$, allora si può considerare l'inverso di a: $\frac{1}{a}$ ...).

7 Dimostrare che se a, b, c sono numeri relativi, con $b \neq 0$, $c \neq 0$, si ha $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$.

(Questa proprietà ci dice che possiamo operare sui simboli $\frac{a}{b}$ con le stesse regole con cui sappiamo operare sulle frazioni).

8 Un commerciante tenta un affare; la probabilità che l'esito sia favorevole è 0,9. In caso di esito favorevole il guadagno è di 8 milioni; in caso di insuccesso vi è una perdita di 100 milioni. Quale è il guadagno medio? È conveniente l'affare?

9

Calcoli ed espressioni

9.1 Nella lezione precedente abbiamo introdotto l'insieme **Q** dei numeri razionali relativi e le operazioni di addizione, di « opposto », di moltiplicazione e di « reciproco ». Queste operazioni verranno dette, d'ora in poi, **operazioni algebriche.** Càpita molto spesso di svolgere calcoli complessi, che coinvolgono varie operazioni algebriche. Per descrivere il modo con cui esse sono collegate fra loro, è opportuno fare ancora ricorso ai grafi, ma con significato completamente diverso da quello considerato nelle lezioni sul calcolo delle probabilità.

Costruzione delle espressioni

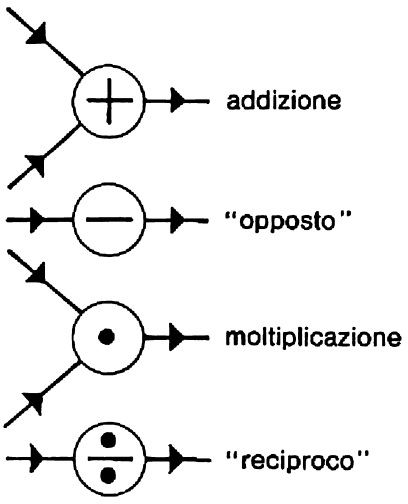


Fig. 1

Pensiamo di avere a disposizione varie « macchine » che eseguiscono le singole operazioni algebriche.

Le macchine dell'addizione e della moltiplicazione hanno *due* canali d'ingresso perché manipolano *due* numeri (che vengono detti, come si sa, **addendi** nel caso dell'addizione, **fattori** nel caso della moltiplicazione). Le altre due macchine hanno *un solo* canale d'ingresso perché manipolano *un solo* numero. Il canale d'uscita, che porta il risultato, è sempre uno solo.

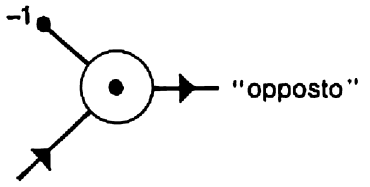


Fig. 2

Notiamo che la macchina di « opposto » può essere sostituita dalla macchina di moltiplicazione per il numero fisso — 1.

Vogliamo ad esempio costruire una macchina che ci fornisca l'area della figura qui disegnata, in cui sono indicate le misure dei lati del contorno. Evidentemente, basta sommare le aree dei due ret-

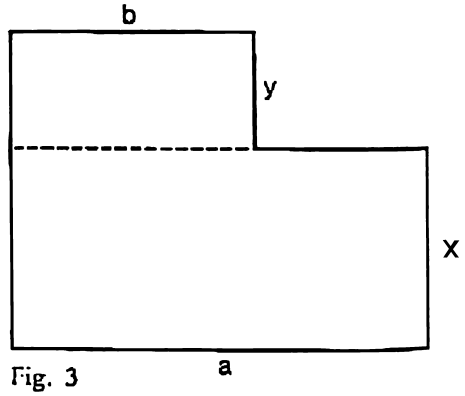


Fig. 3

tangoli di cui essa è composta. Il seguente grafo è di per sé espressivo (fig. 4). Un grafo di questo tipo verrà detto *grafo di calcolo*. Questi grafi, tuttavia, non sono comodi da scrivere: si preferisce descrivere un certo calcolo mediante un'*espressione*, cioè mediante una successione di segni scritti in fila, press'a poco come si fa nella scrittura ordinaria. Ad esempio, il risultato del calcolo ora descritto si può compendiare con l'espressione:

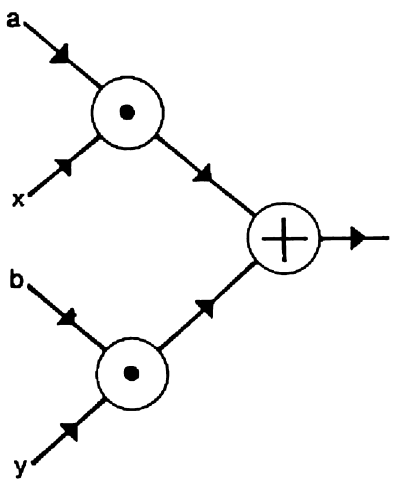


Fig. 4

$$(a \cdot x) + (b \cdot y)$$

Le *parentesi* hanno un ruolo importante perché indicano le precedenze nell'esecuzione delle operazioni. L'uso delle parentesi può essere un po' limitato accettando questa convenzione: che il segno della moltiplicazione $\cdot$ *lega di piú* del segno di addizione $+$, ed anche del segno di sottrazione $-$, inteso naturalmente come segno di *addizione dell'opposto*. Quindi, l'espressione scritta sopra si può scrivere piú semplicemente cosí:

$$a \cdot x + b \cdot y$$

essendo sottinteso che le moltiplicazioni hanno la precedenza sull'addizione. Anzi, spesso si abolisce anche il puntino con cui si indica la moltiplicazione: in questo modo, la nostra espressione si può scrivere:

$$ax + by \qquad (1)$$

Naturalmente, il puntino non verrà abolito quando possono sorgere equivoci nell'interpretazione: ad esempio, scriveremo $3 \cdot 2 = 6$, e non $32 = 6$.

Il fatto che anche in matematica si fissino delle convenzioni non deve fare meraviglia: ogni linguaggio è basato su convenzioni e anche l'algebra

è, in un certo senso, un linguaggio. Del resto, vedremo tra poco perché è ragionevole convenire di dare la precedenza alla moltiplicazione sull'addizione, e non viceversa.

Vediamo ancora un esempio di calcolo algebrico che conduce ad un'espressione. Un automobilista compie un percorso di lunghezza a ad una velocità x e, successivamente, un percorso di lunghezza b ad una velocità y. Quale è la velocità media sull'intero percorso? Il tempo impiegato per compiere il primo percorso è $\frac{a}{x}$, il tempo impiegato per compiere il secondo percorso è $\frac{b}{y}$. Il tempo complessivo è $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$; poiché la lunghezza complessiva è $a + b$, la velocità media è data dall'espressione:

$$\frac{a+b}{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}} \qquad (2)$$

(Per esercizio, fare il grafo di calcolo: è un po' complicato, ma non difficile).

Elaborazione delle espressioni. Polinomi

9.2 Ura volta scritta una certa espressione, comincia una fase molto interessante, che consiste nel trasformarla in modo che diventi piú semplice o, comunque, piú utile per gli scopi che ci proponiamo. Ricordiamo le nove proprietà delle operazioni algebriche che noi abbiamo esposto nel capitolo precedente: esse si traducono in altrettante relazioni di uguaglianza fra due espressioni. Queste relazioni di uguaglianza ci dicono che sostituendo le lettere con numeri qualsiasi si ottengono valori uguali nel primo e nel secondo membro. Allora è possibile, con l'aiuto di queste nove

relazioni, trasformare un'espressione in un'altra che assume lo stesso valore numerico, in una qualsiasi sostituzione delle lettere con numeri razionali relativi...

Vediamo alcuni esempi:

a) $3 \cdot (2x + 3y) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot 3y = 6x + 9y$

(Qui abbiamo applicato la proprietà distributiva, ed anche la proprietà associativa della moltiplicazione, nel passaggio: $3 \cdot (2x) = (3 \cdot 2)x = 6x$ e nell'altro passaggio analogo).

b) $a \cdot (2x + 3y) = a \cdot 2x + a \cdot 3y = 2ax + 3ay$

(Qui abbiamo applicato anche la proprietà commutativa della moltiplicazione).

c) $3 \cdot (2x - 3y) = 3 \cdot [2x + (-3y)] = 3 \cdot 2x + + 3 \cdot (-3y) = 6x - 9y$

[Qui occorre riflettere che $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$]

d) $(a + 2b)(c + 3d) = a(c + 3d) + 2b(c + 3d) = = ac + a \cdot 3d + 2bc + 2b \cdot 3d = ac + 3ad + + 2bc + 6bd$

(Qui la proprietà distributiva è stata applicata due volte, e sono state applicate anche le proprietà associativa e commutativa).

Notiamo che in tutti questi casi l'espressione finale risulta priva di parentesi: infatti, la proprietà distributiva ci ha consentito di trasformare un'espressione costruita con addizioni e moltiplicazioni in una formula che risulta *somma di prodotti*, e che perciò si scrive senza parentesi, avendo noi convenuto che le moltiplicazioni si eseguiscono per prime. Quindi risulta ragionevole questa conven-

zione, che ci consente di scrivere l'espressione finale nel modo piú semplice possibile.

L'espressione (1) e quelle studiate negli esempi *a*), *b*), *c*), *d*) rientrano in un insieme di espressioni particolarmente importante che ora definiremo.

Cominciamo a considerare le espressioni piú semplici possibili, costituite da un solo numero razionale relativo, oppure da una sola lettera, come:

$$2, \frac{3}{5}, a, x, y, z, b, \ldots$$

Le espressioni di questo tipo si dicono **atomiche.** Ebbene, noi chiamiamo **polinomi in Q** le espressioni che si ottengono a partire dalle espressioni atomiche impiegando le sole operazioni di *addizione* e di *moltiplicazione.* (L'operazione di « opposto » è automaticamente inclusa perché si può esprimere mediante la moltiplicazione per -1; non è invece ammessa l'operazione di « reciproco »). Le lettere che compaiono nell'espressione sono dette le **variabili** del polinomio.

È chiaro che, mediante successive applicazioni della proprietà distributiva, della proprietà associativa e commutativa, *il polinomio si può scrivere come somma di prodotti di un numero razionale per alcune delle variabili* (*eventualmente ripetute e quindi scritte come potenze*).

Ognuno di questi prodotti si dice **monomio.**

Ad esempio, l'espressione:

$$(3x^2 + y) \cdot (x - z) + 2x^3$$

è un polinomio, essendo stata ottenuta dalle espressioni atomiche $3, 2, -1, x, y, z$ mediante le

sole operazioni di addizione e moltiplicazione. Il nostro polinomio si può trasformare così:

$$3x^2(x-z)+y(x-z)+2x^3=3x^3-3x^2z+$$
$$+xy-yz+2x^3=5x^3-3x^2z+xy-yz$$

I monomi di cui risulta il nostro polinomio sono: $5x^3$, $-3x^2z$, xy, $-yz$. Naturalmente, $-yz$ si può pensare come $(-1)yz$. Due monomi che contengono le stesse variabili con le stesse potenze si dicono **simili**; due monomi simili si possono sommare ottenendo un solo monomio. Ad esempio, nel calcolo ora eseguito, abbiamo compiuto il passaggio $3x^3+2x^3=5x^3$ (sempre valendoci della proprietà distributiva). Dall'esempio fatto risulta che ogni polinomio si può scrivere come somma di monomi tutti **dissimili** fra loro. Quando è scritto così, si dice che il polinomio è scritto in **forma canonica** (o **regolare**).

È evidente che la somma di due polinomi ed il prodotto di due polinomi sono polinomi.

Esercizi

1 Sviluppare le espressioni seguenti:

$(x+3y)(x+2y)-6y^2$;
$x(a+b)-a(x+b)$

2 Sviluppare:

$[(5a-b)\cdot 2a-3ab]\cdot(2a-3b)-4ab^2$

3 Sviluppare:

$(7x-5y)\cdot(3x+4y)-(6x+7y)\cdot(2x-3y)$

9.3 Eseguiamo ora alcuni calcoli particolarmente importanti. Cominciamo con l'espressione: $(x+y)^2$ (quadrato del binomio). **Prodotti notevoli**

Si ha:

$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y) =$

(Abbiamo applicato la proprietà distributiva).

$= xx + xy + yx + yy = x^2 + xy + xy + y^2 =$

(Abbiamo applicato una seconda volta la proprietà distributiva e poi la proprietà commutativa scrivendo xy in luogo di yx).

$= x^2 + 2xy + y^2$

(Mediante la proprietà distributiva abbiamo potuto scrivere $xy + xy = 1xy + 1xy = (1 + 1)xy = 2xy$).

Concludendo, otteniamo la relazione:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (3)$$

che viene detta *sviluppo del quadrato del binomio.*

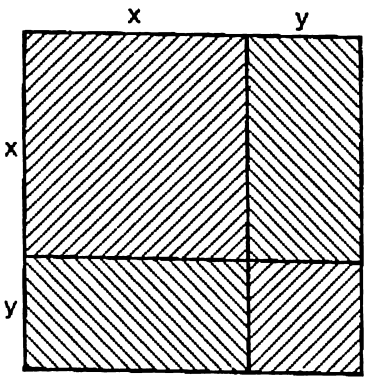


Fig. 5

Veniamo ora ad una interpretazione geometrica di questa relazione. Cerchiamo di esprimere l'area di un quadrato il cui lato misura $x + y$. Evidentemente questo quadrato si può scomporre in quattro parti: un quadrato di lato x, un quadrato di lato y e due rettangoli di lati x ed y.

Notiamo però che nel nostro modello geometrico x ed y sono numeri razionali assoluti (o, se si vuole, numeri positivi) mentre la nostra relazione vale per x ed y qualunque (anche negativi, o di segno opposto fra loro).

Un altro sviluppo molto importante è il seguente. Consideriamo il polinomio $(x + y)(x - y)$; lo possiamo trasformare così:

$x(x - y) + y(x - y) =$

(Solita proprietà distributiva).

$= x^2 - xy + yx - y^2 =$

(Qui abbiamo fatto uso della proprietà distributiva, e poi del fatto che $x(-y) = -xy$

$= x^2 - xy + xy - y^2 =$

(Qui abbiamo usato la proprietà commutativa).

$= x^2 - y^2$

(Abbiamo notato che $-xy$ è l'opposto di xy).

Dunque, possiamo concludere con la relazione

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \qquad (4)$$

Vogliamo vedere che anche questa relazione si può interpretare geometricamente.

Il secondo membro, posto che sia $0 < y < x$, rappresenta l'area della figura ottenuta togliendo ad un quadrato di lato x un quadrato di lato y. Vediamo ora come questa figura si possa trasformare in un rettangolo avente la stessa area (fig. 6). Tagliamo il rettangolo tratteggiato di lati y ed $x - y$ ed aggiungiamolo di sotto (diventa il rettangolo punteggiato nella figura). Otteniamo cosí un rettangolo, di lati $x + y$ ed $x - y$, che ha la stessa area della figura di prima. Quindi si ha:

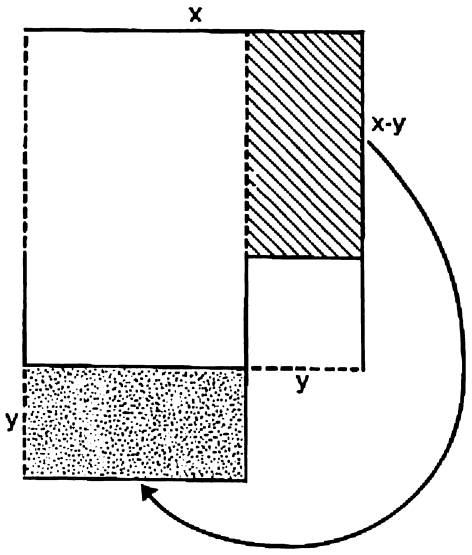


Fig. 6

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Ripetiamo che la nostra interpretazione vale per $0 < y < x$, mentre la relazione (4) vale per x ed y arbitrari in $\mathbf{Q}$.

Le relazioni (3) e (4) sono i piú importanti *pro-*

dotti notevoli. La loro portata viene accresciuta se si pensa che *in luogo di x ed y si possono sostituire non solo numeri razionali arbitrari, ma anche espressioni arbitrarie!* (Naturalmente, occorrerà sostituire ad x una stessa espressione, ovunque x compare; analogamente per y).

Ad esempio, vogliamo calcolare:

$(2a - b)^2$

Prendiamo la relazione (3):

ad x sostituiamo $2a$
ad y sostituiamo $-b = (-1)b$

Allora otteniamo

$$(2a - b)^2 = 4a^2 + 2 \cdot 2a \cdot (-b) + (-b)^2 = \\ = 4a^2 - 4ab + b^2$$

Altro esempio: sviluppiamo $(a + b + c)^2$. Possiamo procedere al calcolo diretto così: $(a + b + c) \cdot (a + b + c) = a \cdot (a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Ma si può anche usare lo sviluppo (3), in questo modo: $(a + b + c)^2 = [a + (b + c)]^2 = a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$, arrivando (naturalmente) al medesimo risultato. Notiamo che la relazione (3) è stata impiegata due volte.

In molti degli esercizi che seguono, il lettore è invitato a *calcolare* un'espressione. Che significato diamo a questo termine? Calcolare significa trasformare un'espressione applicando le proprietà 1), ..., 9); ma ciò può essere fatto in diversi modi e con diversi scopi. Spesso si tratta di rendere, in qualche modo, piú semplice l'espressione. (La

valutazione del grado di *semplicità* di un'espressione è un po' soggettiva, ma in pratica risulta abbastanza spontanea).

Quando si tratta di un polinomio, spesso si sottintende che lo si vuole trasformare in *somma di monomi* (cioè in *forma canonica*); si parla allora di **sviluppare** l'espressione. Spesso però si deve procedere in senso inverso, cioè si deve trasformare l'espressione in un prodotto di espressioni: si dice allora che si vuole **fattorizzare** l'espressione. Osserviamo però che, mentre è sempre possibile sviluppare un polinomio, non sempre è possibile fattorizzarlo in modo significativo.

Esercizi

1 Calcolare:

$(2a+b)^2$; $\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b\right)^2$; $(3x-y)^2$; $\left(\frac{1}{5}a^2b-\frac{5}{2}b^2\right)^2$

2 Calcolare:

$(2x-3)(2x+3)$; $(a^2-4b)(a^2+4b)$; $(x-2y+z)^2$;
$(3ax^2-3ay^2)^2$; $(2a+1)^2+(3a-1)^2-(a+2)(a-2)-6$;
$(a-c)(a+c)(a^2+c^2)-(b-c)(b+c)(b^2+c^2)$

3 Calcolare:

$[(a-b)(a+b)]^2-(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

4 Calcolare:

$(a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$

5 Calcolare:

$(a^2-ab+b^2)\cdot(a+b)-a^3-b^3$

$\frac{1}{4}[(x+y)^2+(x-y)^2]$

6 Riconoscere che le seguenti espressioni sono il quadrato di un'espressione (sono cioè «quadrati perfetti»):

$a^4+4a^2b+4b^2$; $x^2+10x+25$; $x^2+\frac{1}{4}+x$

7 Aggiungere alle seguenti espressioni un numero, in modo che esse diventino un quadrato perfetto:

$9a^4 + 6a^2$; $\frac{1}{4}x^2 + 8x$; $a^2 + a$; $x^2y^4 + 2xy^2$

$a^2 + \frac{1}{a^2}$ (attenzione: questo ultimo esercizio è di carattere diverso dai precedenti e non ha un'unica soluzione. Quale è il termine del quadrato che manca?).

** **8** Fattorizzare l'espressione: $bc(b + c) + ca(c - a) - ab(a + b)$ (è necessario prima sviluppare, poi ricomporre).

9 Fattorizzare l'espressione: $(xu - yv)^2 + (yu + xv)^2$.

* **10** Dimostrare che *non* è possibile scrivere il polinomio $x^2 + 1$ come prodotto di due polinomi del tipo $(x + a)$, $(x + b)$.

Alcuni esercizi aritmetici

9.4 I prodotti notevoli che abbiamo studiato si applicano molto bene a problemi di aritmetica e, in particolare, a problemi di divisibilità. Consideriamo, ad esempio, la differenza fra i quadrati di due interi consecutivi:

$1^2 - 0^2 = 1$
$2^2 - 1^2 = 3$
$3^2 - 2^2 = 5$
$4^2 - 3^2 = 7$
.....

Notiamo che si ottiene la successione dei numeri dispari. Vogliamo trovare una relazione che ci dimostri questo in generale. Se un qualsiasi intero è rappresentato dalla lettera n, l'intero successivo è rappresentato da $n + 1$. Allora la differenza fra i due quadrati è data da:

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

ma si potrebbe anche applicare il prodotto notevole (4), scrivendo:

$(n+1)^2 - n^2 = (n+1+n) \cdot (n+1-n) =$
$= (2n+1) \cdot 1 = 2n+1$

Ora l'espressione $2n$, per $n = 0, 1, 2, \ldots$ ci fornisce tutti i numeri *pari*, mentre l'espressione $2n+1$ ci fornisce tutti i numeri *dispari*.

Ora vogliamo dimostrare che ogni numero del tipo $n^3 - n$, con n intero, è divisibile per 6. Si tratta di fattorizzare la nostra espressione: $n^3 - n =$
$= n \cdot (n^2 - 1) = n \cdot (n+1)(n-1)$. Dunque la nostra espressione non è altro che il prodotto di tre interi consecutivi: $n-1$, n, $n+1$. Ma è evidente che, di tre interi consecutivi, uno è divisibile per 3 ed uno (o due) è divisibile per 2. Dunque il nostro numero è certamente divisibile per 6. Diamo ad n i valori $1, 2, 3, 4$, per verifica: otteniamo i numeri $0, 6, 24, 60$, che sono effettivamente divisibili per 6.

Abbiamo visto che i numeri pari sono quelli che si possono rappresentare con l'espressione $2n$, mentre i numeri dispari sono quelli che si possono rappresentare con l'espressione $2n+1$, essendo n un intero. Possiamo allora dimostrare queste semplici affermazioni, che si intuiscono facilmente:

— la somma di due numeri dispari è un numero pari;

— la somma di un numero pari con un numero dispari è un numero dispari;

— la somma di due numeri pari è un numero pari;

— il prodotto di due numeri dispari è un numero dispari;

— il prodotto di due numeri di cui uno è pari, è pari.

Vediamo la dimostrazione della prima affermazione: i due numeri dispari possono essere scritti: $2n+1$, $2m+1$; sommiamoli:

$(2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$

Poiché $n + m + 1$ è un intero, è chiaro che il numero ottenuto è pari. Lasciamo come esercizio al lettore di dimostrare le altre affermazioni.

A proposito di numeri pari e dispari, riportiamo il seguente grazioso rompicapo:

Ciascuna delle persone che hanno partecipato ad un ricevimento ha dato un certo numero di strette di mano. Dimostrare che il numero di quelli che ne hanno dato un numero dispari, è pari.

9.5 Chiamiamo **espressioni fratte in Q** quelle che si ottengono a partire dalle formule atomiche impiegando le operazioni di *addizione*, *moltiplicazione* e *di « inverso »*. Rispetto ai polinomi, la novità sta ora nel fatto che ammettiamo anche l'operazione di « inverso ». Ad esempio, la (2) è un'espressione fratta e non è un polinomio. Occorre però ricordare che l'operazione di « inverso »: $\frac{1}{x}$ è definita solo per $x \neq 0$; quindi, quando si sostituiscono alle variabili dei valori numerici, occorre sempre verificare che non si annullino le espressioni che si trovano a denominatore. Ad esempio, la (2) è definita per $x \neq 0$, $y \neq 0$, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \neq 0$. Il calcolo delle espressioni fratte si fa tenendo presenti le proprietà 1), ..., 9) delle operazioni algebriche e, in particolare, le relazioni

Espressioni fratte

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \; (b \neq 0, c \neq 0) \; ; \; \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{a} \; (a \neq 0, b \neq 0)$$

Ad esempio, possiamo trasformare cosí la (2):

$$\frac{a+b}{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}} = \frac{a+b}{\frac{ay+bx}{xy}} = \frac{(a+b)\,xy}{ay+bx} = \frac{axy+bxy}{ay+bx}$$

Si capisce facilmente da questo esempio che ogni espressione fratta può essere trasformata nel quoziente di due polinomi (cioè nel prodotto di un polinomio per l'inverso di un altro).

Se questi due polinomi sono scritti in forma canonica, allora si dice che l'espressione fratta è scritta in **forma canonica** (o **regolare**).

Soffermiamoci ancora su un esempio riguardante la somma di due espressioni fratte. Vogliamo mettere in forma canonica l'espressione:

$$\frac{a+b}{ab-b^2} - \frac{4a}{a^2-b^2}$$

Procedendo come nel calcolo delle frazioni, procuriamoci un denominatore comune che sia il meno complesso possibile: è opportuno, in primo luogo, fattorizzare i denominatori. Si ha:

$$ab - b^2 = b(a-b)\ ; \qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Possiamo allora prendere come denominatore comune: $b(a-b)(a+b)$.

Il calcolo allora prosegue in questo modo:

$$\frac{a+b}{ab-b^2} - \frac{4a}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)^2-4ab}{b(a-b)(a+b)} =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{b(a-b)(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{b(a-b)(a+b)} = \frac{a-b}{ab+b^2}$$

In questo capitolo abbiamo studiato le definizioni e le proprietà piú elementari riguardanti le espressioni. Nel proseguimento dei nostri studi ritorneremo su questo argomento (ed, in particolare, sui polinomi) per un ulteriore approfondimento.

Vocaboli e simboli

addendi
fattori
operazioni algebriche
grafo di calcolo
espressione
variabile
polinomio
monomio
monomi simili
espressione fratta
fattorizzare
forma canonica (*o* **regolare**)

Esercizi

1 Le dimensioni di un rettangolo sono a, b. Esprimere il rapporto fra l'area dei rettangolo e il quadrato del perimetro. Trovare i valori che assume questa espressione per $a = b$, $a = 2\,b$, $a = 3\,b$.

2 Calcolare:

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{ab}{a-b} \; ; \quad \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} \; ; \quad \frac{1}{a-1} - \frac{a}{a+1} + \frac{3\,a+2}{a^2-1}$$

3 Riprendere l'esempio del § 5.3, con dati letterali. (Indicare con m il numero delle palline rosse presenti nel sacchetto, con n il numero delle palline azzurre). Trovare le probabilità dei vari esiti che si possono avere in due estrazioni successive (senza rimettere nel sacchetto la prima pallina estratta). Verificare che la somma delle probabilità di tutti questi esiti (eventi elementari) è 1.

4 Calcolare:

$$1 - \frac{x^2}{x^2+xy} + \frac{y^2}{xy+y^2} - \frac{y}{x+y} \; ; \quad \frac{2\,x^2}{1+x} + 1 - x$$

5 Semplificare le seguenti espressioni:

$$\frac{1}{2h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x-h}\right) ; \frac{1}{h}\left((x+h)^2-x^2\right)$$

6 Semplificare l'espressione:

$$\frac{\dfrac{a+by}{c+dy}-\dfrac{a+bx}{c+dx}}{\dfrac{a+b}{c+d}-\dfrac{a}{c}}$$

(ridurla a forma canonica, quindi fare in modo che numeratore e denominatore siano il piú possibile fattorizzati).

* **7** Un rubinetto può riempire una vasca in x ore; un secondo rubinetto la può riempire in y ore. In quanto tempo la possono riempire assieme? (La portata del primo rubinetto è di $\frac{1}{x}$ vasche/ora, la portata del secondo è di $\frac{1}{y}$ vasche/ora, la portata complessiva sarà di...).

8 Preso un numero intero, moltiplicarlo per il numero che si ottiene aggiungendo ad esso 2; al prodotto cosí ottenuto aggiungere 1. Ad esempio: $2 \cdot 4 + 1 = 9$, $1 \cdot 3 + 1 = 4$, $7 \cdot 9 + 1 = 64$. Noteremo che il risultato è sempre un quadrato perfetto. Sapreste dimostrarlo in generale?

9 Mettere sotto forma di prodotti le seguenti espressioni:

$ab^2 - 2ab + 4a$; $5a^2 + 10a + 5$; $x^2 - 16$; $16b^4 - a^2$;
$(a + 2b)^2 - 4x^2$; $16y^2 - (x - 2y)^2$

10

Equivalenze, uguaglianze e disuguaglianze

10.1 Spesso un'affermazione consiste nel porre in relazione un elemento di un certo insieme con un elemento di un altro insieme. Ad esempio, indichiamo con A un insieme di specie animali: gatto, uomo, bue, cavallo, e con B un insieme di materie alimentari: erba, grano, carne, legumi.

Posso tracciare una freccia dall'animale x al cibo y per esprimere che:

l'animale x può mangiare il cibo y.

In questo modo è stabilita una particolare **relazione** fra elementi di A ed elementi di B. Dunque, una relazione non è altro che un insieme di coppie, in cui il primo elemento è preso in A, il secondo in B: nel nostro esempio sono le coppie: (animale, cibo). In altre parole, *una relazione fra elementi di A ed elementi di B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$*. (Si riveda l'inizio del capitolo 4). Abbiamo visto che il prodotto cartesiano può essere rappresentato da una tabella rettangolare in cui ogni casella rappresenta una coppia: ebbene, possiamo convenire di contrassegnare quelle caselle per cui la relazione che ci interessa è vera. Ad esempio, il grafico che riportiamo qui (fig. 2) dice la stessa cosa del diagramma della figura 1.

Naturalmente, non si esclude che i due insiemi A e B coincidano: supponiamo che $A = B$ sia un insie-

Relazioni.
Relazioni di equivalenza

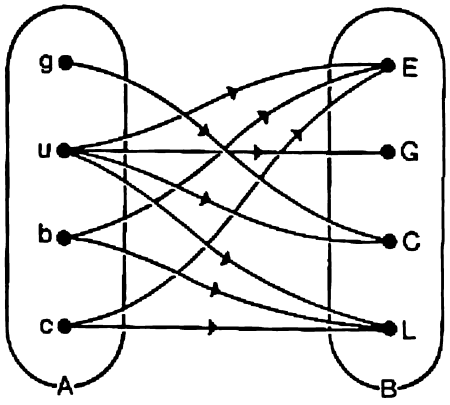


Fig. 1

L		✳	✳	✳
G		✳		
C	✳	✳		
E		✳	✳	✳
	g	u	b	c

Fig. 2

me di ragazzi: Giorgio (G), Enrico (E), Luca (L), Mario (M), Paolo (P), Andrea (A). Una relazione interessante è questa: x è fratello di y. Per una di quelle ... banalità che piacciono ai matematici, conveniamo che ciascuno sia fratello di se stesso. (Del resto, se essere fratelli significa avere gli stessi genitori, la cosa torna perfettamente). Il grafico della figura 3 esprime una relazione di questo tipo. Evidentemente, Giorgio, Luca e Mario sono fratelli; anche Paolo e Andrea sono fratelli, mentre Enrico non ha fratelli (oltre... se stesso). La relazione « fratello » ha la proprietà riflessiva (ciascuno è fratello di se stesso, come abbiamo stabilito), simmetrica (se Luca è fratello di Giorgio, Giorgio è fratello di Luca), transitiva (se Luca è fratello di Giorgio e Giorgio è fratello di Mario, Luca è fratello di Mario). Allora, in base alla relazione di « fratello » il gruppo dei ragazzi viene suddiviso in tanti sottoinsiemi ciascuno dei quali comprende i ragazzi di una stessa famiglia.

A					✳	✳
P					✳	✳
M	✳		✳	✳		
L	✳		✳	✳		
E		✳				
G	✳		✳	✳		
	G	E	L	M	P	A

Fig. 3

In generale, supponiamo di avere in un insieme A una relazione $x \sim y$ (che si legge: x è **equivalente** ad y), cioè una relazione con queste proprietà:

$x \sim x$ (proprietà **riflessiva**)

se è $x \sim y$, allora è $y \sim x$ (proprietà **simmetrica**)

se è $x \sim y$ ed è $y \sim z$, allora è $x \sim z$ (proprietà **transitiva**).

Allora, l'insieme A viene ripartito in tanti sottoinsiemi che sono composti di elementi fra loro equivalenti; ognuno di questi insiemi si chiama **classe di equivalenza**. Si dice anche che si è operata così una **partizione** nell'insieme A.

Vediamo un altro esempio; nell'insieme **N** degli interi naturali introduciamo la seguente relazione $m \sim n$ significa che $m - n$ è un multiplo di 2 (eventualmente nullo o negativo). Si può verificare che si tratta effettivamente di una relazione di equivalenza; le classi di equivalenza sono due:

quella formata dai numeri pari e quella formata dai numeri dispari.

Un caso particolare, ma molto importante, di relazione di equivalenza è la relazione di **uguaglianza** (che abbiamo già applicato tante volte e che, anzi, ci è nota fin dalle scuole elementari). La relazione di uguaglianza gode delle proprietà *riflessiva*, *simmetrica*, *transitiva*, ma esprime qualcosa di piú di una semplice relazione di equivalenza: scrivendo $x = y$ noi vogliamo dire che x *ed* y *rappresentano lo stesso oggetto*, quindi x potrà essere sostituito con y tutte le volte che lo desideriamo. Ad esempio, $5 + 3 = 8$: perciò, dove si trova scritto $5 + 3$ si può scrivere 8, e viceversa.

Esercizi

1 Guardando la carta geografica, fa' l'elenco degli stati dell'Europa occidentale; quindi rappresenta con un grafico la relazione: « lo stato x confina con lo stato y ».

2 Presi i numeri naturali ≤ 20, rappresentare con un grafico la relazione: « x è divisibile per y ».

3 Il sig. Rossi, il sig. Bianchi e il sig. Neri hanno i capelli di uno di questi tre colori. Ciascuno li ha di un colore diverso dal suo cognome. Il sig. Rossi non è il piú vecchio. Di che colore sono i loro capelli?

4 Un sacco contiene alcuni oggetti, che sono contraddistinti da un peso e da un colore. Sappiamo che vi sono due oggetti che hanno peso diverso, e che vi sono due oggetti che hanno colore diverso.
Dimostrare che vi sono certamente due oggetti che differiscono *sia per peso che per colore*.
(Qui si tratta ancora di una relazione che si può formulare in questi termini: esiste un oggetto che ha peso x e colore y. Può essere utile pensare al grafico di questa relazione).

* **5** Nel § 8.2 abbiamo ricordato che due frazioni $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{s}$ sono equivalenti se è $ms = nr$; riconoscere che questa è effettivamente una relazione di equivalenza, cioè gode delle proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva.
(I numeri razionali non sono altro che insiemi di frazioni fra loro equivalenti, cioè classi di equivalenza).

Relazioni di ordine. La struttura di ordine nei razionali

10.2 Le relazioni rappresentate dal segno $<$ e dal segno $\leq$ si dicono **relazioni di ordine.** Le

abbiamo conosciute nel campo dei numeri razionali assoluti.

Sappiamo, ad esempio, che: $\frac{2}{7} < \frac{3}{5}$, $1 < 1{,}4$ ecc.

Vogliamo dapprima prendere in esame la relazione $x < y$ («x minore di y», ovvero «y maggiore di x») e mettere in evidenza le seguenti proprietà fondamentali:

a) *Se è* $x < y$, *allora si ha* $x \neq y$ (quest'ultima relazione si legge: «x *diverso da* y»).

b) *Se è* $x < y$, *ed è* $y < z$, *allora è* $x < z$ (questa è la proprietà **transitiva** della relazione di ordine).

c) *Se è* $x \neq y$, *allora è* $x < y$, *oppure* $y < x$.

Se vogliamo, possiamo divertirci a *dimostrare*, partendo da queste proprietà, altre proprietà piú o meno intuitive della relazione $<$. Ad esempio, possiamo vedere che *non può essere simultaneamente* $x < y$ *ed* $y < x$. Infatti, se fosse cosí, per la proprietà *b*) si avrebbe $x < x$. Ma allora, per la proprietà *a*) si avrebbe $x \neq x$, ciò che non può essere perché è $x = x$.

(È interessante questa dimostrazione, o fa l'effetto di certe barzellette un po' troppo astratte?).

Per capire meglio, vogliamo vedere l'esempio di una relazione che non è una relazione d'ordine. Supponiamo di disporre alcune persone attorno ad un tavolo rotondo e di percorrere il tavolo in un certo senso; consideriamo la relazione: «il signor x viene dopo il signor y». Se essa è vera, è anche vero che «il signor y viene dopo il signor x», come si vede subito continuando a fare il giro del tavolo.
Dunque questa relazione non può essere una relazione di ordine.

Ritorniamo dunque alla relazione d'ordine che

sussiste nell'insieme dei numeri razionali (assoluti); possiamo estendere questa relazione a tutto l'insieme dei razionali relativi? Certamente! Anzi, l'idea intuitiva di questo ordinamento ci ha guidato proprio nell'introduzione dei numeri relativi. (Ricordiamo l'inizio dell'8° capitolo dove abbiamo rappresentato i numeri relativi ordinatamente su una retta).

Volendo procedere con precisione, possiamo porre la seguente definizione.

Si dice che $x < y$ (*x è minore di y*) *se* $y - x$ *è un numero positivo.*

Ad esempio, essendo $(-2) - (-5) = 3$, diciamo che $-5 < -2$. Allora si verifica facilmente che valgono le tre proprietà delle relazioni di ordine.

Vale la *a*): se è $x < y$, allora $y - x$ è un numero positivo, quindi è $y \neq x$, perché se fosse $y = x$ sarebbe $y - x = 0$.

Verifichiamo la *b*): dire che è $x < y$ e che è $y < z$ significa dire che $y - x$ è positivo e $z - y$ è positivo. Poiché la somma di due numeri positivi è un numero positivo, si ha che $z - x = (z - y) + (y - x)$ è positivo. Quindi è $z > x$.

Anche la *c*) si verifica facilmente perché se è $x \neq y$, $y - x$ non è nullo e allora può essere positivo (quindi si ha $y > x$), oppure può essere negativo: ma allora il suo opposto $-(y - x) = x - y$ è positivo, e ciò significa che è $x > y$.

Occorre stare bene attenti a non confondere la relazione d'ordine fra i numeri razionali relativi con quella che sussiste fra i loro valori assoluti. Ad esempio, è $-9 < 2$, $-7 < -1$, malgrado sia $|-9| > |2|$, $|-7| > |-1|$.

È interessante vedere come la relazione di ordine è legata alle operazioni fondamentali che abbiamo introdotto nell'insieme dei razionali relativi.

Per quello che riguarda l'addizione si ha:

d) Se è $x < y$, allora, per ogni numero h è:

$x + h < y + h$

Cioè: una relazione d'ordine si conserva dopo avere aggiunto ad ambo i membri una stessa quantità.

Ad esempio:

dalla relazione $2 < 5$ otteniamo $2 + 4 < 5 + 4$, cioè $6 < 9$.

La dimostrazione di questa proprietà è semplice: si ha:

$(y + h) - (x + h) = y - x$; dunque se $y - x$ è positivo, anche $(y + h) - (x + h)$ è positivo, cioè è $x + h < y + h$.

e) Se è $x < y$ e *se* h *è un numero positivo*, allora si ha $h \cdot x < h \cdot y$.

Cioè: una relazione di ordine si conserva se ambo i membri vengono moltiplicati per una stessa quantità *positiva.*

Ad esempio:

dalla relazione $-2 < 3$ otteniamo $(-2) \cdot 4 < 3 \cdot 4$, cioè: $-8 < 12$.

La dimostrazione si fa ricordando che il prodotto di due numeri positivi è positivo.

Allora, se $y - x > 0$, si ha $h \cdot (y - x) > 0$; e (applicando la solita proprietà distributiva):

$h \cdot y - h \cdot x > 0$, che si legge: $h \cdot x < h \cdot y$

Che succede se si moltiplica membro a membro per un *numero negativo*?

Si vede subito che *la relazione d'ordine si inverte.*

Ad esempio, da $-2 < 3$ ricaviamo, moltiplicando per -2, $(-2)(-2) > 3 \cdot (-2)$, cioè $4 > -6$.

Possiamo facilmente dimostrare che questo accade in generale; sia $x < y$, cioè $y - x$ sia positivo; supponiamo che h sia un numero negativo. Allora, per la regola dei segni, $h \cdot (y - x)$ è negativo, cioè $-h \cdot (y - x) = h \cdot x - h\,y$ è positivo. Ma questo vuol dire che è: $h \cdot x > h \cdot y$. Quindi effettivamente la relazione d'ordine si è invertita.

Aggiungiamo qualche parola riguardo alla relazione $x \leqslant y$ (x minore o uguale di y). Anzitutto, la relazione $x \leqslant x$ è vera, dal momento che il caso dell'uguaglianza è ammesso; ad esempio, la relazione $3 \leqslant 3$ è vera. Anche la relazione $3 \leqslant 5$ non è affatto errata. Solamente, la relazione $3 < 5$ fornisce un'informazione piú completa.

Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

Se è $x \leqslant y$ *ed è* $y \leqslant x$, *allora è* $x = y$.

Se è $x \leqslant y$ *ed è* $y \leqslant z$, *allora è* $x \leqslant z$ (*proprietà transitiva della relazione* $\leqslant$).

Presi comunque x *ed* y, *si ha* $x \leqslant y$, *oppure* $y \leqslant x$.

Inoltre:

d') *Se è* $x \leqslant y$, *allora, per ogni numero* h *si ha:*

$$x + h \leqslant y + h$$

e') *Se è* $x \leqslant y$ *e se* h *è un numero positivo o nullo, si ha:*

$h \cdot x \leqslant h \cdot y$

Dati due numeri a, b con $a \leqslant b$, si dice **intervallo di estremi** a e b l'insieme dei numeri x tali che $a \leqslant x \leqslant b$. L'intervallo di estremi a e b verrà indicato con il simbolo $[a, b]$.

Esercizi

(Attenzione!: questi esercizi contengono anche risultati di cui faremo uso in seguito).

1 Qualunque sia il numero x, si ha $x^2 \geqslant 0$. (Distinguere, tre casi: x positivo, x negativo, $x = 0$). Quale è il segno di x^m, con m intero positivo?

2 Se è $h > 0$, risulta $\frac{1}{h} > 0$; se è $h < 0$, risulta $\frac{1}{h} < 0$. Se $h > 1$, risulta $\frac{1}{h} < 1$.

3 Se è $a < b$, ed è $c < d$, allora si ha $a + c < b + d$ (cioè: due relazioni di ordine, dello stesso tipo, si possono sommare membro a membro).
Per la dimostrazione sommiamo c membro a membro nella prima relazione: $a + c < b + c$; sommiamo membro a membro b nella seconda: $b + c < b + d$. Non resta che applicare la proprietà transitiva.

4 Siano a, b, c, d numeri positivi e sia: $a < b$, $c < d$; allora è $a \cdot c < b \cdot d$.

5 Sia h un numero positivo minore di 1. Dimostrare che le sue successive potenze formano una successione decrescente, cioè:
$1 > h > h^2 > h^3 > h^4 > \ldots$

6 Dati due numeri razionali a, b con $a < b$, si ha:

$$a < \frac{1}{2}(a + b) < b$$

(In altre parole: la media aritmetica è compresa fra i due numeri).

* **7** Siano a, b, c, d numeri positivi tali che $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; dimostrare che si ha:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

10.3 Un'**equazione** *è una relazione di uguaglianza « aperta », cioè contenente una lettera* x ; si ammette che x rappresenti un elemento variabile in un certo insieme (ad esempio: l'insieme Q dei razionali relativi) e si pone il problema di individuare il sottoinsieme degli x per cui la relazione risulta vera. (Questi elementi vengono detti **soluzioni** o anche **radici** dell'equazione).

Le equazioni: alcune riflessioni generali sui metodi per risolverle

Ad esempio, l'equazione $x^2 = 4$ ha due (e solo due) soluzioni: $2, -2$. In certi casi, l'equazione risulta verificata da ogni x : si dice allora che essa è un'**identità**. [Le relazioni di uguaglianza (1, ..., 9) del capitolo 8°, che esprimono le proprietà formali delle operazioni $+, \cdot$, e la (2) e la (3) del capitolo 9°, sono identità, perché sono sempre vere, qualunque siano i valori delle variabili].

Sappiamo già risolvere in pratica certe equazioni; è opportuno però esaminare un caso concreto per renderci conto di quello che facciamo. Vogliamo risolvere l'equazione:

$$5x + 2 = 8 \qquad (1)$$

Cominciamo con l'aggiungere -2 ad ambo i membri. Se il primo e il secondo membro sono uguali, essi rimangono tali dopo che si è aggiunta ad essi una stessa quantità. (Per fissare le idee, possiamo pensare ad una bilancia in equilibrio: essa rimane in equilibrio dopo che si sono aggiunti pesi uguali ai due piatti). Si ricava allora:

$$5x + 2 + (-2) = 8 + (-2) \text{ cioè}$$

$$5x = 8 + (-2) = 6 \qquad (2)$$

L'operazione fatta viene descritta volgarmente in questi termini: « porto 2 dal primo al secondo membro cambiandolo di segno ».

Ora moltiplichiamo ambo i membri per $\frac{1}{5}$ (che

è il reciproco di 5):

$$\frac{1}{5} \cdot 5x = \frac{6}{5}$$

e, semplificando:

$$x = \frac{6}{5} \qquad (3)$$

Dunque, se x è un valore per cui è vera la (1), per lo stesso x devono essere vere la (2) e la (3). Allora, deve essere $x = \frac{6}{5}$. Ma siamo sicuri che per $x = \frac{6}{5}$ risulta vera la (1), cioè che $\frac{6}{5}$ è anche soluzione (unica) della (1)? Certamente! Infatti, sè è vera la (3) è vera anche la (2) che si può ottenere dalla (3) moltiplicandola membro a membro per 5. E se è vera la (2) è vera anche la (1), che si può ottenere da quella, aggiungendo ad ambo i membri 2.

Ricapitoliamo: le operazioni fatte per passare dalla (1) alla (3) sono state:

aggiungere ad ambo i membri -2 (opposto di 2)

moltiplicare ambo i membri per $\frac{1}{5}$ (reciproco di 5).

Possiamo allora « ritornare indietro » dalla (3) alla (1) compiendo le seguenti operazioni:

moltiplicare ambo i membri per 5
aggiungere ad ambo i membri 2.

Dunque, la tecnica che seguiamo (tutte le volte che ci è possibile) per risolvere un'equazione è quella di ricavare una nuova equazione che sia verificata *dagli stessi valori* che verificano la prima, e solo da quelli. Si tratta di fare una catena piú o meno lunga di passaggi di questo tipo, finché non si trova una equazione le cui soluzioni sono evidenti ... Naturalmente, può accadere di trovare alla fine un'equazione che non ha soluzioni (in altre parole, l'insieme delle soluzioni può essere l'insieme vuoto). Consideriamo, ad esempio, la equazione $\frac{1}{2}(x+6) = 5 + \frac{x}{2}$; si ricavano le equazioni equivalenti $\frac{x}{2} + 3 = 5 + \frac{x}{2}$; $0 \cdot x = 5 - 3$; $0 = 2$. Se ci fosse un valore di x per cui la nostra equazione è verificata, si avrebbe come conseguenza che $0 = 2$, ciò che non può essere. Dunque, la nostra equazione non ha alcuna soluzione.

Qui viene l'occasione di un discorso generale riguardante un tipico modo di procedere matematico. Molte affermazioni matematiche hanno questa forma:

Se accade una certa cosa $\mathcal{A}$, *allora accade anche un'altra cosa* $\mathcal{B}$.

(*Si dice anche che dall'***ipotesi** $\mathcal{A}$ *segue la* **tesi** $\mathcal{B}$, *oppure che* $\mathcal{A}$ **implica** $\mathcal{B}$). Ma occorre mettere bene in chiaro che non sempre si può rovesciare questo discorso, cioè, ammesso che $\mathcal{A}$ implichi $\mathcal{B}$, non sempre si può dire che se si verifica $\mathcal{B}$ si verifica anche $\mathcal{A}$. Per fare un esempio semiserio: il discorso *Se piove prendo l'ombrello* è accettabile mentre la frase *Se prendo l'ombrello piove* lo è molto meno.

Facciamo qualche esempio piú preciso:

L'affermazione: *Se un numero è divisibile per* 4, *è pari* è corretta.

L'affermazione *Se un numero è pari è divisibile per* 4 è falsa. Ad esempio il numero 6 è pari, ma non è divisibile per 4.

Ancora: *Se due numeri sono uguali, i loro quadrati sono uguali* è vera! L'affermazione *Se i quadrati di due numeri sono uguali, i numeri sono uguali* è falsa, come si vede riflettendo che è $-3 \neq 3$, pur essendo $(-3)^2 = 3^2 = 9$. (L'affermazione diventa vera se ci si restringe ai numeri ≥ 0).

Se si vuole ottenere un'equazione che abbia esattamente le stesse soluzioni dell'equazione assegnata, occorre compiere passaggi che si possono invertire [come appunto abbiamo fatto prima per risolvere la (1)]. Consideriamo ora l'equazione:

$$x = 3 \qquad (4)$$

Eleviamo al quadrato ambo i membri; otteniamo:

$$x^2 = 9 \qquad (5)$$

La soluzione della (4) è certamente soluzione della (5) (perché, se due numeri sono uguali, i loro quadrati sono uguali). Ma la (5) ha come soluzioni $3, -3$: la seconda non è una soluzione della (4).
Il fatto è, appunto, che per passare dalla (4) alla (5) abbiamo compiuto un'operazione non reversibile.

Qualche volta, nel risolvere le equazioni, occorre compiere dei passaggi irreversibili (come elevare al quadrato ambo i membri): allora può accadere di introdurre «soluzioni estranee». In questi casi, è necessario fare una verifica per eliminare le eventuali soluzioni estranee. Comunque, queste osservazioni ci torneranno utili solo piú avanti, perché per ora ci occupiamo solo di equazioni che si possono risolvere con passaggi «reversibili».

Esercizi

1 Risolvere le seguenti equazioni:

$2x - 9 + 8x = 5x + 6$; $3(x-2) - 1 = 2(4-x)$;
$5x - 7(2-x) + 11 = 4x - 3(5-3x)$;
$(x+3)(2x-3) - 6x = (x-4)(2x+4) + 12$

2 Risolvere le seguenti equazioni:

$$\frac{x}{2} + 3 = x - \frac{x}{3}\,;\quad \frac{1}{4}\left(2x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(2x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}\left(3x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right);$$

$$\frac{x-1}{5} + \frac{x-9}{2} = 3\,;\quad \frac{x - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} + \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} + \frac{1}{20} = \frac{x + \frac{2}{3}}{\frac{4}{3}};$$

$$2x - \frac{19 - 2x}{2} = \frac{2x - 11}{2};$$

$$\left[3x - \frac{x}{2} - 1 - 2\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(3x - \frac{11}{3}\right);$$

3 Nell'equazione $\frac{2}{5}x + a = \frac{1}{2}a + \frac{3x - a}{3}$ voglio che $x = 2$ sia una soluzione. Come devo prendere a?
(Non è detto che in un'equazione l'incognita debba essere sempre chiamata x ... l'abito non fa il monaco!...).

4 Due numeri consecutivi sono tali che aggiungendo al minore il doppio del maggiore e dividendo per 2 si ottiene 19. Quali sono?

5 L'area di un quadrato è cm^2 144: condurre una corda parallela ad un lato in modo che il quadrato venga diviso in due parti, una $\frac{1}{6}$ dell'altra.

* **6** In un numero di 2 cifre, la cifra delle decine supera di due quella delle unità mentre la somma vale 6; quale è il numero?

7 Un insegnante propone ai suoi allievi un «test» con 4 risposte possibili. Ad esempio: che cos'è il Colosseo?

un mammifero;
un monumento dell'antica Roma;
un eroe omerico;
un campione di pugilato.

L'allievo deve sottolineare una sola risposta. Gli allievi che non conoscono la risposta esatta «tirano ad indovinare», scegliendo a caso una risposta.

Su 30 studenti 21 hanno dato la risposta esatta. Quanti, probabilmente, conoscevano la risposta esatta?

* **8** Risolvere il problema precedente, con dati letterali anziché numerici. Porre n numero degli allievi, m numero delle risposte esatte, r numero delle alternative del « test ».

Le disequazioni: alcuni interessanti problemi

10.4 Una relazione formulata attraverso i simboli $<$ oppure $\leqslant$ e contenente una lettera x si dice **disequazione.** Ad esempio:

$$3x \leqslant 10 - 2x \qquad (6)$$

intendendo che x sia preso in $\mathbf{Q}$. Il metodo che abbiamo usato per risolvere le equazioni si può applicare, nei suoi aspetti fondamentali, alle disequazioni. Anche in questo caso, se procediamo per passaggi reversibili, possiamo essere certi di ottenere nuove disequazioni che hanno esattamente le stesse soluzioni delle precedenti.

Vediamo, ad esempio, come si può risolvere la (6). Aggiungendo $2x$ ad ambo i membri, si ottiene

$3x + 2x \leqslant 10$, cioè

$$5x \leqslant 10 \qquad (7)$$

(Questo passaggio si può, al solito, vedere come trasporto del termine $-2x$ dal secondo al primo membro, con cambiamento di segno).

Moltiplicando membro a membro per il numero positivo $\frac{1}{5}$ (reciproco di 5), la disuguaglianza rimane nello stesso verso:

$\frac{1}{5} \cdot 5x \leqslant \frac{1}{5} \cdot 10$, cioè

$x \leqslant 2$ (8)

È interessante rappresentare le soluzioni su una retta. L'insieme delle soluzioni è la semiretta $\{x \leqslant 2\}$.

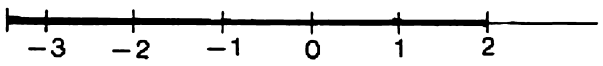


Fig. 4

Spesso è interessante cercare i numeri che soddisfano simultaneamente a due (o anche a piú di due) disuguaglianze. (Si parla allora di **sistema** di disequazioni; naturalmente, si parla, con significato analogo, anche di sistema di equazioni).

Consideriamo, ad esempio, il seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x \leqslant 2x + 9 \\ 2x \leqslant 3x + 2 \end{cases} \qquad (9)$$

Trasformiamo simultaneamente le due disequazioni, con le regole che abbiamo già precisato:

$$\begin{cases} 5x - 2x \leqslant 9 \\ 2x - 3x \leqslant 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x \leqslant 9 \\ -x \leqslant 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant 3 \\ x \geqslant -2 \end{cases}$$

Notiamo che, nella seconda disequazione abbiamo moltiplicato membro a membro per il numero negativo -1, e quindi abbiamo invertito il senso della diseguaglianza.

Concludendo, per essere una soluzione, il numero x deve soddisfare nello stesso tempo alle due condizioni $x \leqslant 3$ e $x \geqslant -2$. L'insieme delle soluzioni è dunque l'*intersezione* dell'insieme delle soluzioni della prima con l'insieme delle soluzioni della seconda:

$\{x \leqslant 3\} \cap \{x \geqslant -2\}$,

cioè l'insieme $\{-2 \leqslant x \leqslant 3\}$

che si può rappresentare così sulla retta:

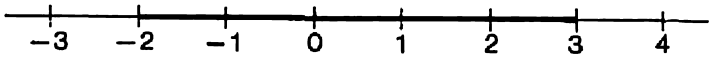


Fig. 5

Vi sono molti problemi pratici che si traducono in disequazioni. Ad esempio, risolviamo questo semplice quesito:

Io devo andare a fare una commissione in città: andando con la bicicletta mi muovo alla velocità di 20 km/h; andando in automobile mi muovo alla velocità di 40 km/h, ma devo impiegare 5 minuti per il parcheggio. Quale mezzo mi conviene usare?

Il bello di questo problemino è che c'è un'incognita nascosta, che occorre mettere in evidenza: infatti il buon senso ci dice che occorre tener conto della lunghezza del percorso (che indicheremo con x, in km).

Ora vogliamo scrivere una disequazione che esprima quando è più conveniente l'automobile, cioè quando il tempo impiegato servendosi dell'automobile è minore:

$$\frac{x}{40} + \frac{1}{12} < \frac{x}{20}$$

(Attenzione: il tempo di 5 minuti espresso in ore

diventa $\frac{1}{12}$).

Si ha subito:

$$\frac{1}{12} < \frac{x}{20} - \frac{x}{40} \text{ cioè}$$

$$\frac{1}{12} < \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{40}\right) x \quad ; \quad \frac{1}{12} < \frac{1}{40} x$$

Da cui, finalmente

$$x > \frac{10}{3} = 3{,}333\ldots$$

Dunque, l'automobile diventa conveniente solo per distanze superiori a 3,33... km.

Per concludere, vediamo un grazioso problema che si riduce ad un confronto di probabilità.

Le regole di un torneo di scacchi sono queste: un giocatore che aspira a qualificarsi gioca tre partite; per qualificarsi ne deve vincere almeno due *consecutive*. Ad un aspirante vengono contrapposti due avversari contro cui deve giocare alternativamente: uno (che indichiamo con A) è piú forte dell'altro (che indichiamo con B). L'aspirante può però scegliere l'avversario da cui cominciare: può scegliere perciò fra il programma ABA e il programma BAB. Quale dei due programmi gli conviene scegliere?

Indichiamo con p la probabilità di vincita contro A indichiamo con q la probabilità di vincita contro B. L'ipotesi è $p < q$ (perché è piú difficile vincere contro A).

Tracciamo il grafo relativo allo schema $A\,B\,A$,

in cui i rami che scendono verso sinistra rappresentano una vincita, quelli che scendono verso destra una sconfitta.

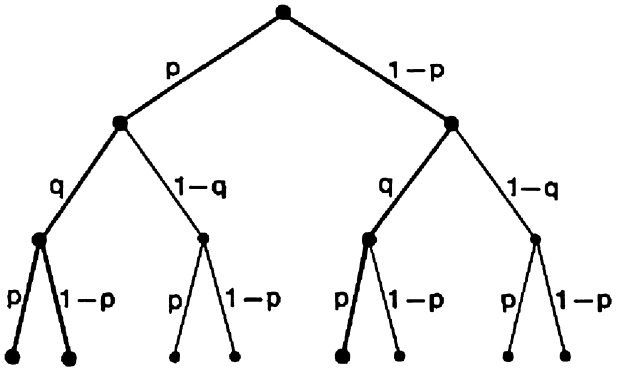


Fig. 6

Segniamo con un tratto piú marcato i cammini che corrispondono ad un esito favorevole del torneo e sommiamo le relative probabilità.

Ricaviamo

$$p \cdot q \cdot p + p \cdot q \cdot (1 - p) + (1 - p)\, q \cdot p = \\ = p \cdot q \cdot (2 - p)$$

Ora si tratta di fare la stessa cosa per lo schema BAB. Ma, senza bisogno di ripetere tutto il grafo, possiamo osservare che ora si tratta semplicemente di scambiare fra loro i giocatori A e B, e quindi scambiare fra loro le relative probabilità: p e q.

Allora, la probabilità di esito favorevole del torneo nel caso BAB è data da $q \cdot p\ (2 - q)$.

Il problema è quello di confrontare fra loro le due espressioni trovate:

$$p \cdot q \cdot (2 - p) \quad ? \quad q \cdot p\ (2 - q)$$

Mettiamo il punto interrogativo in luogo del segno $<$ oppure $>$, che dobbiamo determinare. Poiché i numeri p e q sono positivi, possiamo eliminare da entrambe le espressioni il fattore $p \cdot q$; otteniamo cosí:

$2 - p \quad ? \quad 2 - q$

Possiamo anche togliere l'addendo 2 da ambo i membri.

$-p \quad ? \quad -q$

A questo punto è chiaro che, essendo $p < q$, si ha:

$-p > -q$, e quindi è vero che:

$p \cdot q \cdot (2 - p) > p \cdot q\,(2 - q)$

Concludendo, conviene lo schema ABA ; occorre notare che in questo caso l'aspirante deve combattere due volte su tre contro l'avversario piú forte, ma l'avversario piú debole si trova in posizione intermedia, e questa circostanza compensa lo svantaggio.

Vocaboli e simboli

Relazione
» **di equivalenza** $\sim$
» **di uguaglianza** $=$
Relazioni di ordine $<$, $\leqslant$
Intervallo $[a\ ,\ b]$
Ipotesi, tesi
Soluzioni, radici
Disequazioni
Sistema (di equazioni o disequazioni)
$\mathcal{A}$ **implica** $\mathcal{B}$
Equazioni
Identità

Esercizi

1 Risolvere il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{4} \geqslant \dfrac{2x+1}{2} \\ 3x + \dfrac{2x-1}{3} \leqslant x+1 \end{cases}$$

e rappresentare le soluzioni sulla retta.

2 Risolvere il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 5x \geqslant 2x+9 \\ 2x \geqslant 3x+2 \end{cases}$$

(attenzione! fra tutti gli insiemi possibili c'è anche l'insieme vuoto...)

3 Un'officina meccanica deve produrre almeno 10 000 pezzi al mese. Questi pezzi sono prodotti da macchine, ciascuna delle quali ne può fare 1200 al mese. Le macchine vengono installate in un capannone rettangolare con lati di m 38 e m 15. Ogni macchina richiede uno spazio di 50 m^2.
Quale può essere il numero delle macchine che si installano?
(Ricavare un sistema di due disequazioni, e risolverlo; ricordare poi che il numero delle macchine è necessariamente intero...).

* **4** Abbiamo già affrontato il seguente problema. Un automobilista parte e procede ad una velocità di 80 km/h. Un secondo automobilista parte dopo 10 minuti. Come deve essere la velocità del secondo perché possa superare il primo entro 100 km?
Sostituire i dati del problema con lettere e scrivere l'espressione che risolve il problema in generale. (Si indicheranno con v e w le velocità dei due automobilisti, con r il ritardo del secondo, con s la distanza entro la quale deve avvenire il sorpasso).

* **5** Un automobilista compie la metà di un certo percorso alla velocità di 60 km/h. A quale velocità deve compiere l'altra metà perché la velocità media sull'intero percorso sia di 72 km/h? (Chiamiamo pure s la lunghezza dell'intero percorso... troveremo poi che la risposta non dipende da s!).

6 Un commerciante acquista alla fabbrica certi capi di vestiario; egli deve pagare il 30% di tasse sul prezzo d'acquisto, e vuole guadagnare L 1300 per ogni capo. Il prezzo di vendita non deve superare L 10 000; quale deve essere il prezzo d'acquisto?

11

Le scatole cinesi

Questo capitolo presenta alcune nozioni che esigono una riflessione abbastanza lunga per essere ben capite ed assimilate. Occorrerà rileggerlo con cura, a distanza di tempo.

Valori approssimati

11.1 In molti casi concreti càpita di non conoscere esattamente un numero, ma di poterne dare solo delle valutazioni approssimate. Ad esempio supponiamo di sapere che un certo numero x soddisfa alle disuguaglianze: $0{,}24 \leqslant x \leqslant 0{,}25$; in altre parole sappiamo solamente che x appartiene all'intervallo che ha come estremi 0,24 e 0,25; il numero 0,24 si dice **valore approssimato per difetto,** il numero 0,25 si dice **valore approssimato per eccesso.** L'intervallo si dice **intervallo di approssimazione** e, naturalmente, l'approssimazione è tanto piú buona quanto piú è piccolo questo intervallo.

Le misure di grandezze fisiche (come: lunghezze, temperature, tempi, ...) non sono mai ottenibili esattamente: disponendo di apparecchi perfezionati, esse possono essere ottenute con notevole precisione, ma c'è comunque un limite alla precisione raggiungibile. Del resto, per le esigenze pratiche sono sempre i valori approssimati (piú o meno, secondo i casi) quelli che servono.

Supponiamo di avere due sbarrette di acciaio, una di lunghezza x (espressa in cm) compresa fra 30,25 e 30,26, l'altra di lunghezza y compresa fra 40,36 e 40,37:

$30{,}25 \leq x \leq 30{,}26 \;\; ; \;\; 40{,}36 \leq y \leq 40{,}37$

Se le congiungiamo assieme nel senso della lunghezza, otteniamo una sbarra lunga $x + y$, e si avrà:

$70{,}61 \leq x + y \leq 70{,}63$

Infatti, come si intuisce subito, e come si può dimostrare in base alle proprietà delle relazioni di ordine, sommando i due valori per difetto si ottiene un valore per difetto di $x + y$, sommando i valori per eccesso si ottiene un valore per eccesso.

Esercizi

1 Le misure x ed y dei lati di un rettangolo (in metri) sono così espresse approssimativamente:

$10{,}5 \leq x \leq 10{,}6 \qquad 25{,}2 \leq y \leq 25{,}4$

In quali intervalli sono compresi il perimetro e l'area del rettangolo?

2 Di un numero x si sa che: $3 \leq x \leq 4$. Che cosa si può dire del suo opposto?

3 Di un numero x si sa che: $\frac{5}{7} \leq x \leq \frac{8}{9}$. Che cosa si può dire del suo reciproco?

* **4** Se x ed y sono i numeri considerati nell'esercizio 1, in quale intervallo può variare $y - x$?

11.2 In molti problemi matematici accade che il calcolo di un numero si possa spingere ad una precisione elevata quanto si vuole: in altre parole, si può ottenere che l'intervallo di approssimazione sia piú piccolo di una quantità piccolissima stabilita (ad es.: 1 millesimo, 1 decimillesimo ecc.).

Achille e la tartaruga: un'interpretazione

Utilizziamo, per il nostro scopo, il classico esempio di *Achille e la tartaruga*, introdotto dal filosofo

Zenone *. Achille (il « piè veloce ») insegue la tartaruga, che ha inizialmente un vantaggio di 1 metro; la velocità di Achille è di 10 metri al secondo, quella della tartaruga è di 1 metro al secondo; ci domandiamo quando Achille raggiungerà la tartaruga. Indichiamo con t (secondi) il tempo necessario: lo spazio percorso da Achille è dato da $10\,t$, e deve risultare uguale alla somma del vantaggio iniziale della tartaruga con lo spazio che essa percorre. Si ottiene così l'equazione:

$$10\,t = 1 + t$$

che sappiamo risolvere senza difficoltà:

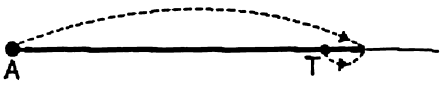


Fig. 1

$$10\,t - t = 1$$

$$9t = 1 \text{ e, infine, } t = \frac{1}{9} \text{ (in secondi).}$$

Ma vediamo la versione dei fatti che ci viene fornita da Zenone.

In $\frac{1}{10}$ di secondo Achille raggiunge il punto in cui si trovava inizialmente la tartaruga: ma intanto la tartaruga si è mossa ed ha percorso uno spazio uguale ad $\frac{1}{10}$ (in metri).

* Zenone di Elea, vissuto nel V secolo a. C., fu un celebre filosofo dell'antichità. Con le sue argomentazioni egli cercò di dimostrare che il moto è impossibile e che, perciò, la percezione del moto degli oggetti è illusoria.
Col nostro senso pratico di oggi, ragionamenti come quello su Achille e la tartaruga appaiono ridicoli. Eppure i Greci ebbero lo straordinario merito di prendere sul serio problemi come questi affermando il primato della intelligenza e della ragione. Senza i Greci, non ci sarebbe la scienza di oggi e non ci sarebbero neppure quelle applicazioni pratiche della scienza di cui siamo tanto orgogliosi.

Per raggiungere la nuova posizione della tartaruga, Achille dovrà impiegare un altro tempo, uguale a $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}01$, quindi, in tutto, avrà impiegato un tempo

$$t_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} = 0{,}11 \text{ (in secondi)}$$

Ma Achille non ha ancora raggiunto la tartaruga, perché, nel tempuscolo di $\frac{1}{10}$ di secondo essa ha percorso $\frac{1}{100}$ di metro. Achille arriverà a questa nuova posizione, ma impiegherà $\frac{1}{1000}$ di secondo, e quindi un tempo complessivo

$$t_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = 0{,}111$$

e cosí via. Zenone credeva di poter dimostrare che Achille non avrebbe mai raggiunto la tartaruga, dal momento che, per raggiungerla, egli avrebbe dovuto compiere infinite operazioni. Noi pensiamo invece che Achille può raggiungere benissimo la tartaruga e che gli infiniti valori trovati:

$$0{,}1 \quad 0{,}11 \quad 0{,}111 \quad 0{,}1111 \quad 0{,}11111 \ldots \qquad (1)$$

sono semplicemente valori approssimati per difetto del valore esatto $\frac{1}{9}$ che abbiamo trovato risolvendo l'equazione: lo dimostreremo tra poco.

In altre parole: il tempo di $\frac{1}{9}$ necessario ad Achille per raggiungere la tartaruga può essere idealmente diviso in infiniti tempuscoli, ma è pur sempre un tempo finito.

Del resto, nel tempo 0,2 (doppio del primo tempuscolo) Achille ha percorso 2 metri ed ha perciò superato abbondantemente la tartaruga, che ha percorso solo 0,2 metri ed è quindi arrivata solo a m 1,2 dal punto iniziale di Achille. Dunque 0,2 è un valore approssimato per eccesso del tempo cercato. Si vede subito che tutti i seguenti valori sono approssimati per eccesso:

$$0{,}2 \quad 0{,}12 \quad 0{,}112 \quad 0{,}1112 \quad 0{,}11112 \ldots \qquad (2)$$

Infatti, basta riconoscere che, raddoppiando l'ultimo tempuscolo, Achille supera certamente la tartaruga.

La divisione fra gli interi e la rappresentazione decimale dei razionali

11.3 Fin dalle scuole elementari abbiamo imparato la divisione con resto di un intero (**dividendo**) per un altro intero (**divisore**). Possiamo esprimere in modo preciso il significato di questa operazione per mezzo del seguente enunciato:

Dati due interi a, b $(b > 0)$ *esiste un'unica coppia di interi* q, r (*detti quoziente e resto, rispettivamente*) *tali che si abbia:*

$$a = bq + r \quad , \quad \textit{essendo} \quad 0 \leq r < b$$

L'enunciato è intuitivamente chiaro, se si pensa che q esprime il massimo numero di volte in cui b è contenuto in a; perciò il resto è inferiore a b.

Il resto r *è nullo quando e solo quando* a *è multiplo di* b (*cioè:* b *è un divisore di* a).

La divisione con resto si applica spesso al problema

di approssimare una qualsiasi frazione con un numero decimale *.

I numeri decimali, come sappiamo bene, sono frazioni aventi per denominatore una potenza di 10; ad esempio:

$$\frac{15}{100} = 0{,}15 \; ; \quad \frac{357}{1000} = 0{,}357 \; ; \quad \frac{-243}{10} =$$

$$= -(24{,}3) \; \ldots$$

Dunque un numero decimale è un numero del tipo $\frac{a}{10^m}$, dove a è un intero relativo ed m è un intero positivo. Una frazione *ridotta ai minimi termini* si può trasformare in numero decimale solo quando moltiplicando il denominatore per un intero lo si può trasformare in una potenza di 10; questo accade, evidentemente, quando *il denominatore contiene solo i fattori primi* 2 *e* 5. Quando vi sia anche un solo fattore diverso da 2 e 5, la cosa non è piú possibile.

Quando una frazione $\frac{p}{q}$ non è trasformabile in numero decimale, è possibile approssimarla mediante un numero decimale, a meno di un decimo, di un centesimo, di un millesimo ecc.

Vogliamo, ad esempio, approssimare la frazione $\frac{3}{7}$ a meno di $\frac{1}{10}$.

Scriviamo:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{10}\,\frac{30}{7} =$$

(In sostanza, qui abbiamo trasformato le 3 unità in 30 decimi: come se avessimo assunto il decimo come nuova unità)

* Anzi, nell'insegnamento elementare, la divisione con resto si applica quasi esclusivamente in questa circostanza.

$$= \frac{1}{10}\,\frac{7\cdot 4+2}{7} =$$ (abbiamo eseguito la divisione di 30 per 7: il quoziente è 4 ed il resto è 2)

$$= \frac{1}{10}\left(4+\frac{2}{7}\right) = 0{,}4 + \frac{1}{10}\,\frac{2}{7}$$

Adesso, per avere l'approssimazione a meno di $\frac{1}{100}$ basta compiere un'analoga operazione sulla frazione $\frac{2}{7}$.

$$\frac{3}{7} = 0{,}4 + \frac{1}{100}\,\frac{20}{7} =$$

$$= 0{,}4 + \frac{1}{100}\left(\frac{7\cdot 2+6}{7}\right) =$$

$$= 0{,}4 + \frac{1}{100}\left(2+\frac{6}{7}\right) = 0{,}42 + \frac{1}{100}\,\frac{6}{7}$$

A queste operazioni si dà solitamente il ben noto assetto grafico:

```
30      | 7
 20     | 0,4285714
  60
   40
    50
     10
      30
```

Nelle divisioni con resto che noi eseguiamo via via, i resti possibili sono i numeri 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6: infatti i resti sono sempre minori del divisore, che è 7, e non possono essere 0 perché la frazione $\frac{3}{7}$ non è equivalente ad un numero decimale.

Quindi, ci possono essere al piú 6 resti diversi (e ci sono effettivamente nel nostro caso); proseguendo, ci deve essere un resto che si ripete e, da quel punto in poi, tutti i resti si devono ripetere ciclicamente. Questa constatazione ha carattere generale: *se* $\frac{p}{q}$ *è la frazione che si vuole approssimare, vi saranno, al piú,* $q - 1$ *resti diversi e quindi, ad un certo punto, si dovranno avere delle ripetizioni.* Gli allineamenti decimali che forniscono la migliore approssimazione per difetto di un numero razionale a meno di $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ecc. sono dunque, *da un certo punto in poi, periodici,* cioè constano di un gruppo di cifre che si ripete ciclicamente.

Questo fatto era certamente noto a tutti fin dalla scuola elementare: qui abbiamo cercato di capirne « il perché ».

Tornando al nostro esempio, i numeri:

0,4 0,42 0,428 0,4285 ...

sono i valori decimali con una, due, tre... cifre dopo la virgola, che meglio approssimano *per difetto* il numero razionale $\frac{3}{7}$. Si deduce allora che i valori:

0,5 0,43 0,429 0,4286 ...

sono i numeri decimali, con una, due, tre, ... cifre dopo la virgola, che meglio approssimano *per eccesso* il numero razionale $\frac{3}{7}$.

Abbiamo dunque la **successione di intervalli**:

[0,4 0,5] [0,42 0,43] [0,428 0,429]
[0,4285 0,4286] ...

di ampiezza $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10\,000}, \ldots$

Essi hanno queste proprietà:

a) ciascuno è contenuto nel precedente;

b) le ampiezze degli intervalli diventano piccole quanto si vuole.

Chiameremo **scatola cinese** una successione di intervalli con queste proprietà.

Approssimiamo ora con numeri decimali la frazione $\frac{1}{9}$, che abbiamo trovato nel paragrafo precedente a proposito di Achille e la tartaruga. Si ha

```
10   | 9
 10  | 0,111
  10
   1
```

I numeri decimali:

0,1 0,11 0,111 0,1111 ...

ci forniscono valori approssimati per difetto a meno di $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$

Se aumentiamo di un'unità l'ultima cifra, siamo sicuri di ottenere i corrispondenti valori approssimati per eccesso:

0,2 0,12 0,112 0,1112 ...

Queste sono appunto le successioni (1) e (2) che avevamo trovato nel paragrafo precedente.

Gli intervalli:

[0,1 0,2] [0,11 0,12] [0,111 0,112]
[0,1111 0,1112] ...

forniscono dunque una scatola cinese che racchiude il numero $\frac{1}{9}$.

Questa scatola cinese ci permette di individuare perfettamente il numero $\frac{1}{9}$, che avevamo trovato all'inizio del paragrafo 2 risolvendo l'equazione.

Cosí la successione dei tempi corrispondenti alle varie posizioni di Achille ha avuto una interpretazione interessante: il paradosso di Zenone ci è stato utile per presentare la soluzione del nostro problema in una nuova forma.

L'incommensurabilità della diagonale del quadrato con il lato

11.4 A questo punto dobbiamo presentare un fatto piuttosto sconcertante. Sappiamo che cosa significa che un segmento è una certa frazione di un altro: dire che T è i $\frac{3}{7}$ di U significa che la settima parte del segmento U sta esattamente 3 volte in T. Si dice allora che T ha misura $\frac{3}{7}$ assumendo U come unità di misura.

Ed ecco il fatto sconcertante: *non sempre la misura*

di un segmento rispetto ad un altro si può esprimere mediante un numero razionale!

Faremo vedere che la misura della diagonale di un quadrato rispetto al lato non si può esprimere mediante un numero razionale. (Si dice anche che la diagonale è **incommensurabile** con il lato).

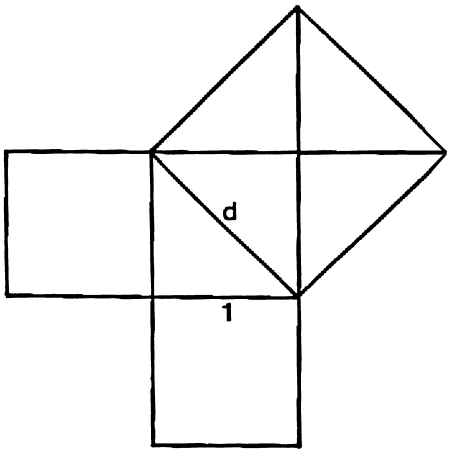


Fig. 2

Sia dunque 1 la misura del lato e d quella della diagonale. Il teorema di Pitagora (che abbiamo appreso nella scuola media, e che ritroveremo piú avanti) ci dice che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa. (La figura rende evidente questo risultato nel caso che ci interessa). Allora si ha:

$$1 + 1 = 2 = d^2$$

Dimostriamo che questa relazione non può essere vera se d è un numero razionale.

Infatti, supponiamo che sia $d = \frac{p}{q}$ essendo p e q interi ($q \neq 0$), che possiamo pensare *primi fra loro*. Sostituendo in luogo di d nella uguaglianza scritta, ricaviamo:

$2 = \frac{p^2}{q^2}$ da cui, moltiplicando ambo i membri per q^2, otteniamo:

$$2\,q^2 = p^2$$

Si tratta di dimostrare che questa relazione è assurda. Infatti essa ci dice che p^2 è un numero pari: ma allora anche p è pari perché se p fosse dispari il suo quadrato sarebbe dispari (lo abbiamo dimostrato nel § 9.4). Possiamo allora porre $p = 2\,m$. Perciò:

$$2q^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

Da questa ricaviamo semplificando:

$$q^2 = 2m^2$$

Ma questa relazione, ragionando come prima, ci dice che anche q deve essere pari. Siamo arrivati ad un assurdo perché p e q, essendo primi fra loro, non possono essere entrambi pari!

Vi è un altro modo piú rapido per rendersi conto che la relazione $2q^2 = p^2$ (con p, q interi, $q \neq 0$) non può essere vera. Scomponendo p^2 e q^2 in fattori primi, si vede subito che ogni fattore compare un numero pari di volte in entrambi i numeri (attenzione! se un fattore primo non compare, cioè compare 0 volte, l'affermazione è ancora vera perché 0 è un numero pari).

Seguiamo ora le vicende del fattore 2: in $2q^2$ compare un numero dispari di volte, in p^2 compare un numero pari di volte; allora l'uguaglianza è assurda! Questa dimostrazione è piú intuitiva: abbiamo però avuto bisogno del seguente risultato anche esso intuitivo, ma un po' complicato da dimostrarsi: *ogni intero si scompone in modo unico in fattori primi.* (A parte, s'intende, l'ordine dei fattori: ad es.: $30 = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 3$).

La scoperta della incommensurabilità della diagonale di un quadrato con il lato fu fatta dalla scuola di Pitagora nel VI secolo a. C., ed ebbe un'enorme importanza nello sviluppo della matematica greca.

Le scatole cinesi

11.5 Se non si può trovare alcun numero razionale il cui quadrato sia esattamente 2, possiamo però trovare dei numeri razionali (anzi, dei numeri decimali) il cui quadrato è molto vicino a 2.

Se un numero razionale positivo x è tale che $x^2 < 2$, lo potremo considerare a buon diritto un valore per difetto; se è tale che $x^2 > 2$, lo dovremo considerare un valore approssimato per eccesso. Dunque 1 è certamente un valore per difetto, 2 un valore per eccesso; per avere un'approssimazione migliore, è opportuno suddividere l'intervallo [1 2] in dieci intervalli uguali:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
x^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61
	< 2	< 2	< 2	< 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2

Fig. 3

Osserviamo questa tabella:

nel passaggio da 1,4 ad 1,5 il quadrato passa da un numero minore di 2 ad un numero maggiore di 2: l'intervallo [1,4 1,5] è il nuovo intervallo di approssimazione.

Possiamo suddividere anche questo in 10 parti uguali. Troviamo:

$$1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2 \quad ; \quad 1{,}42^2 = 2{,}0164 > 2$$

Quindi abbiamo un intervallo di approssimazione [1,41 1,42] contenuto nel precedente, di ampiezza $\frac{1}{100}$. Cosí possiamo continuare:

Abbiamo la seguente tabella di valori approssimati.

$$\begin{cases} \text{per difetto: } 1 \quad 1{,}4 \quad 1{,}41 \quad 1{,}414 \quad 1{,}4142 \ldots \\ \text{per eccesso: } 2 \quad 1{,}5 \quad 1{,}42 \quad 1{,}415 \quad 1{,}4143 \ldots \end{cases} \tag{3}$$

Ecco la scatola cinese che abbiamo costruito:

[1 2] [1,4 1,5] [1,41 1,42] [1,414 1,415] ...

Il procedimento che abbiamo descritto ci permette di proseguire indefinitamente determinando le cifre decimali una dopo l'altra, anche se non c'è una legge semplice (come era quella della periodicità) che consenta di scriverle subito.

Abbiamo cosí costruito una scatola cinese: ma, a differenza di quello che accadeva prima (nel § 11.3 abbiamo costruito una scatola cinese che conteneva il numero $\frac{3}{7}$), ora nella nostra scatola cinese non c'è dentro... nulla (cioè non c'è dentro nessun numero razionale: infatti, se ci fosse, il suo quadrato dovrebbe essere esattamente 2 mentre abbiamo visto che questo non può accadere).

11.6 * Il procedimento che abbiamo impiegato per calcolare $\sqrt{2}$ non è certamente molto comodo. In seguito introdurremo un procedimento molto piú veloce. Ma intanto possiamo chiederci se il nostro procedimento possa essere un po' snellito, cosí da evitare di calcolare proprio tutti i quadrati di un intervallo decimale (come in fig. 2). Cominciamo proponendoci un gioco che all'apparenza sembra lontano dalla questione di cui ci occupiamo:

Una questione di strategia

Determinare un numero intero sconosciuto compreso fra 0 *e* 9 *attraverso una serie di domande a cui si può solo rispondere «sí» oppure «no»*. Si tratta, naturalmente, di decidere con il minimo numero di domande.

Il problema può essere affrontato con una «strategia ingenua» ponendo le successive domande cosí:

«è 0?» «è 1?» «è 2?» ...

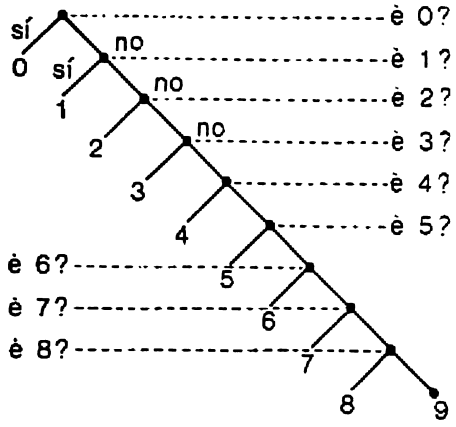


Fig. 4

* Questo paragrafo risponde ad una curiosità (ed è risaputo che la curiosità è madre della scienza). Però esso può essere saltato senza pregiudicare la comprensione di tutto l'argomento.

Naturalmente, appena abbiamo ottenuto risposta affermativa alla nostra domanda, noi non proseguiamo.

Noi assegniamo probabilità $\frac{1}{10}$ alla comparsa di una delle 10 cifre. Lo sviluppo possibile del gioco è dato dal grafo della figura 4.

Notiamo che il numero massimo delle domande necessarie è 9 (e non 10) perché, se la risposta alle prime 8 domande è negativa, rimane solo l'indecisione fra 8 e 9. Il numero medio delle domande che si devono fare è dato allora dalla formula:

$$\frac{1}{10}\left\{1+2+3+4+5+6+7+8+9+9\right\}=$$

$$=\frac{1}{10}\,54=5{,}4$$

Vediamo ora come si può procedere con una «strategia sofisticata». Si intuisce che conviene fare la domanda in modo che il « sí » e il « no » suddividano l'insieme delle cifre in due sottoinsiemi aventi lo stesso numero di oggetti, o almeno, aventi numeri piú vicini che è possibile. Vediamo come diventa il grafo di una tale strategia. (Segniamo in un cerchietto il contenuto della domanda).

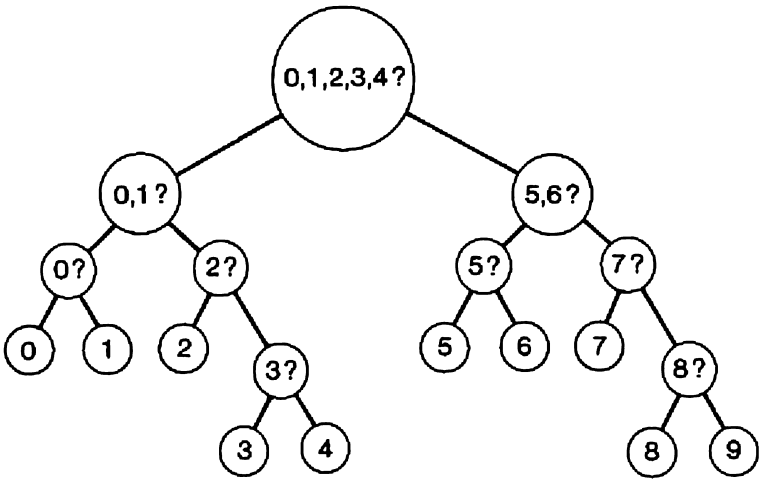


Fig. 5

Il numero medio delle domande si calcola sempre tenendo presente che ciascun cammino del grafo ha probabilità $\frac{1}{10}$:

$$\frac{1}{10}\left\{6 \cdot 3 + 4 \cdot 4\right\} = \frac{34}{10} = 3{,}4$$

Si trova dunque che il numero medio delle domande necessarie è nettamente inferiore a quello trovato con la « strategia ingenua ».

Ritorniamo al problema del calcolo approssimato della radice quadrata. Supponiamo di procedere, ad esempio, al calcolo approssimato di $\sqrt{3}$. È chiaro che 1 è valore approssimato per difetto, 2 per eccesso; la prima cifra decimale può essere: 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9.

La « strategia ingenua » consiste nel calcolare successivamente, $1, 1^2, 1{,}2^2, 1{,}3^2, \ldots, 1{,}9^2$; ad ogni passo ci domandiamo se il quadrato calcolato è inferiore a 3. Troviamo che si ha $1{,}7^2 = 2{,}89 < 3$, mentre è $1{,}8^2 = 3{,}24 > 3$. Dunque 1,7 è il valore cercato. In questo caso sono state necessarie 8 « domande » (cioè 8 calcoli di quadrati): comunque, abbiamo visto che il numero medio è 5,4.

Proviamo ora con la « strategia sofisticata ». Calcoliamo $1{,}5^2$ e troviamo $2{,}25 < 3$.

Dunque 1,5 è un valore approssimato per difetto: la cifra cercata è allora fra le cifre: 5 , 6 , 7 , 8 , 9. (Cosí abbiamo formato due gruppi di 5 cifre ciascuno).

Il passo successivo può essere quello di provare con la cifra 7: in questo modo isoliamo l'insieme $\{5, 6\}$ dall'insieme $\{7, 8, 9\}$. Cosí si prosegue, come nel grafo tracciato. Come abbiamo visto, il numero delle «domande» necessarie, cioè il numero delle moltiplicazioni da eseguire è, *in media*,

inferiore a quello che si ottiene con la «strategia ingenua». (Ma, attenzione: abbiamo detto *in media*, e non possiamo escludere che in singoli casi sia migliore la « strategia ingenua »).

11.7 Eccoci finalmente alla conclusione del nostro discorso. Vogliamo far vedere che *le scatole cinesi si comportano come veri e propri numeri*, nel senso che:

I numeri reali e le loro proprietà algebriche

è possibile definire per esse delle operazioni di addizione e moltiplicazione che hanno tutte le proprietà considerate nell'8° capitolo; è possibile definire una relazione di ordine che gode di tutte le proprietà messe in evidenza nel 10° capitolo (§ 10.2).

Ci accontenteremo di dare un'idea intuitiva di tutto ciò.

Cominciamo dalla relazione di ordine. Per capire come si può procedere, cominciamo proponendoci di voler confrontare fra loro due numeri x, y che non sono noti esattamente, ma solo attraverso loro valori approssimati per difetto e per eccesso. Sappiamo, ad esempio, che $a \leqslant x \leqslant b$,

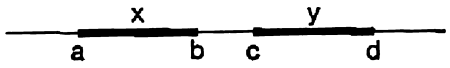


Fig. 6

$c \leqslant y \leqslant d$. Se i due intervalli $[a \;\; b]$ e $[c \;\; d]$ sono disgiunti (cioè non hanno alcun punto in comune) i due numeri x ed y sono certamente diversi: quale è il piú grande? Supponiamo che sia $b < c$, cioè che il valore approssimato per eccesso di x sia minore di un valore approssimato per difetto di y. Non c'è dubbio allora che deve essere $x < y$.

Un discorso analogo vale per le scatole cinesi, le

quali appunto non sono altro che una successione di intervalli di approssimazione.

Consideriamo, ad esempio, le due scatole cinesi formate dai valori decimali approssimati di $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, rispettivamente. Ricordiamo che per $\sqrt{2}$ si hanno i valori approssimati delle successioni (3), mentre per $\sqrt{3}$ si hanno i seguenti valori:

$$\begin{cases} \text{per difetto: } 1 \quad 1{,}7 \quad 1{,}73 \quad 1{,}732 \quad 1{,}7320 \ldots \\ \text{per eccesso: } 2 \quad 1{,}8 \quad 1{,}74 \quad 1{,}733 \quad 1{,}7321 \ldots \end{cases} \tag{4}$$

Se prendiamo valori *interi* come valori approssimati, troviamo che 1 è valore approssimato per difetto e 2 valore approssimato per eccesso, per entrambi. Quindi l'intervallo [1 2] appartiene ad entrambe le scatole cinesi, ma basta prendere le approssimazioni a meno di $\frac{1}{10}$ per trovare due intervalli disgiunti. Infatti il secondo intervallo della scatola cinese che rappresenta $\sqrt{2}$ è [1,4 1,5], mentre il secondo intervallo della scatola cinese che rappresenta $\sqrt{3}$ è [1,7 1,8]. Essendo $1{,}5 < 1{,}7$, è chiaro che si deve scrivere $\sqrt{2} < \sqrt{3}$. (Qui, ormai, i simboli $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ stanno appunto ad indicare le relative scatole cinesi).

Vediamo ora come le scatole cinesi si possono sommare e moltiplicare fra loro. Anche in questo caso l'idea buona ci viene suggerita dal calcolo approssimato. Supponiamo ancora che x ed y siano numeri di cui si conoscono solo valori approssimati per difetto e per eccesso. Sia $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Allora, come abbiamo già notato nel paragrafo 11.1, si ha $a + c \leqslant x + y \leqslant b + d$, cioè $a + c$ (somma dei valori approssimati per difetto) è un valore approssimato per difetto di $x + y$, mentre $b + d$ (somma dei valori approssimati per eccesso) è un valore approssimato per eccesso di $x + y$.

Ad esempio, vogliamo rappresentare $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; sappiamo che uno degli intervalli che definiscono $\sqrt{2}$ è [1,41 1,42]; uno degli intervalli che definiscono $\sqrt{3}$ è [1,73 1,74]. Allora, uno degli intervalli della scatola cinese che rappresenta $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sarà [3,14 3,16]. L'ampiezza degli intervalli originari era $\frac{1}{100}$; l'ampiezza dell'intervallo ottenuto è $\frac{2}{100}$. È chiaro che se avessimo preso per $\sqrt{2}$ e per $\sqrt{3}$ intervalli di approssimazione di ampiezza $\frac{1}{1000}$, avremmo ottenuto un intervallo di ampiezza $\frac{2}{1000}$. Si intuisce dunque che, con questo procedimento, si ottiene una nuova scatola cinese.

Per il prodotto si potrà fare in modo analogo. Supponiamo di considerare due scatole cinesi positive (cioè maggiori di 0). Possiamo allora supporre che esse siano costruite con intervalli di approssimazione tutti positivi: perciò, moltiplicando fra loro i valori approssimati per difetto si ottiene un valore minore di quello che si ottiene moltiplicando i valori approssimati per eccesso. Ad esempio, il numero $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ sarà rappresentato da una scatola cinese che ha fra i suoi intervalli l'intervallo $[1{,}41 \cdot 1{,}73 \quad 1{,}42 \cdot 1{,}74] = [2{,}4393 \quad 2{,}4708]$. Si intuisce che se in ciascuna delle due scatole cinesi si prendono intervalli di ampiezza molto piccola, moltiplicando fra loro gli estremi (cioè il valore per difetto per il valore per difetto, e il valore per eccesso per il valore per eccesso) si otterrà un intervallo di ampiezza molto piccola. Quindi si dà cosí significato anche alla moltiplicazione delle scatole cinesi.

Nei prossimi anni, proseguendo negli studi di matematica, avremo occasione di ritornare con maggiore precisione e profondità sulle nozioni ora presentate.

Intanto, avendo ben presenti le operazioni algebri-

che e le relazioni di ordine che abbiamo definito per le scatole cinesi, diamo un nome preciso a questi nuovi enti matematici:

d'ora in poi, le scatole cinesi verranno dette **numeri reali.**

Se dentro ad una scatola cinese c'è un numero razionale (nel senso che questo numero è contenuto in tutti gli intervalli), allora la scatola cinese si identificherà con questo numero (ricordiamo l'esempio della frazione $\frac{1}{9}$ e della scatola cinese di numeri decimali che abbiamo costruito). Se la scatola cinese non contiene alcun numero razionale (ricordiamo il caso di $\sqrt{2}$), allora si dice che essa rappresenta un **numero irrazionale.**

L'insieme dei numeri reali si indica con **R** (e lo si chiama anche **retta reale** perché per la relazione di ordinamento, i numeri reali possono essere rappresentati su una retta, come vedremo piú ampiamente quando inizieremo lo studio della geometria).

Cosí l'insieme **Z** (degli interi relativi) è contenuto nell'insieme **Q** (dei razionali) e questo, a sua volta, è contenuto nell'insieme **R** (dei numeri reali).

Quest'ultimo è dunque l'insieme numerico piú ampio che consideriamo, almeno per ora. D'ora in poi, quando diremo « numero » senza altra specificazione, intenderemo sempre « numero reale ».

Vocaboli e simboli

valore approssimato
v.a. per difetto
» per eccesso

intervallo di approssimazione
dividendo, divisore
quoziente, resto
scatola cinese = numero reale
segmenti incommensurabili fra loro
numeri irrazionali
R : retta reale (insieme dei numeri reali)
$\sqrt{x}$: radice quadrata di x $(x \geq 0)$

Esercizi

1 Se a è un numero irrazionale, anche $a + 3$ è irrazionale. (Ragionare così: supponiamo che, al contrario, $a + 3$ sia razionale...).

2 Dare il valore approssimato per difetto a meno di $\frac{1}{100}$ di $\sqrt{7}$.

3 Un numero x è compreso fra 5 e 6 (ossia $5 \leq x \leq 6$). Dire tra quali valori è compreso il quadrato di x. Scrivere in modo dettagliato le giustificazioni.

4 Dimostrare che $\sqrt{6}$ è irrazionale. (Si può ripetere, passo per passo, il ragionamento fatto per dimostrare che $\sqrt{2}$ è irrazionale).

5 Dimostrare che $\sqrt{7}$ è irrazionale. (Si procede per analogia...).

* **6** Dimostrare che $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è irrazionale. (Supponiamo che, invece, sia razionale e poniamo $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$, con p e q interi; eleviamo al quadrato ambo i membri...).

** **7** Scrivere due cifre decimali in fila, poi sommarle e scrivere a destra la cifra delle unità della somma (sempre in rappresentazione decimale). Proseguire poi così, sempre sommando le ultime due cifre scritte. Ad esempio (partendo con 53):

5381909987527965 . . .

Si domanda: l'allineamento che si ottiene è, da un certo punto in poi, periodico?

12

Le applicazioni

12.1 Riprendiamo la nozione di **relazione,** che abbiamo introdotto all'inizio del 10° capitolo. Dati ancora due insiemi A, B, consideriamo le relazioni che hanno questa proprietà: *ogni elemento di A ha uno ed un solo corrispondente in B*. In altre parole, dato un qualsiasi elemento x di A c'è uno ed un solo elemento y di B tale che la coppia (x, y) fa parte della relazione (ricordiamo che una relazione è un insieme di coppie). Una relazione avente questa proprietà si dice un'**applicazione** (o anche **funzione,** o **trasformazione**). L'insieme A si dice **dominio** dell'applicazione, l'insieme B **codominio.** Per chiarirci le idee, vediamo subito alcuni esempi di relazioni che *non* sono applicazioni. La relazione rappresentata dalla figura 2 non è un'applicazione. Infatti, l'elemento b del primo insieme non ha alcun corrispondente nel secondo insieme. Anche la relazione rappresentata dalla figura 3 non è un'applicazione: infatti, all'elemento b di A corrispondono due elementi nel secondo insieme. È facile controllare invece che la relazione illustrata dalla figura 1 è un'applicazione. Non contrasta con la nostra definizione il fatto che due diversi elementi (a e b) del dominio hanno un solo corrispondente (m) nel codominio. Intuitivamente, possiamo pensare un'applicazione come uno spostamento che porta ogni elemento di A a coincidere con un elemento di B.

Un'applicazione viene indicata di solito con una lettera: ad esempio f. Se a è un elemento del dominio A, si indica con $f(a)$ l'elemento del codominio che corrisponde ad a: se f è l'applicazione

Applicazione (o funzione o trasformazione)

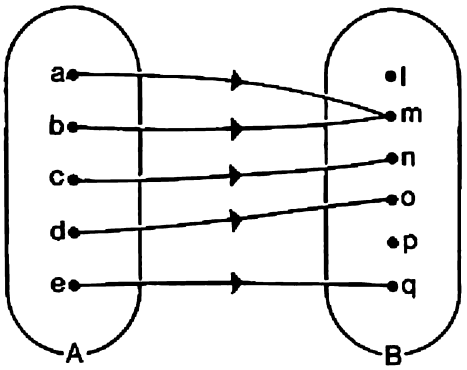


Fig. 1

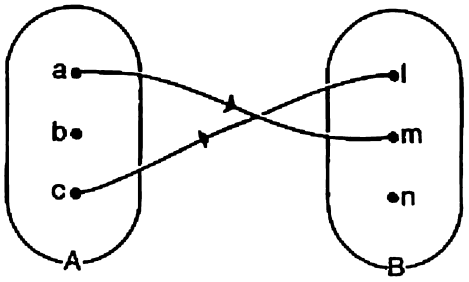


Fig. 2

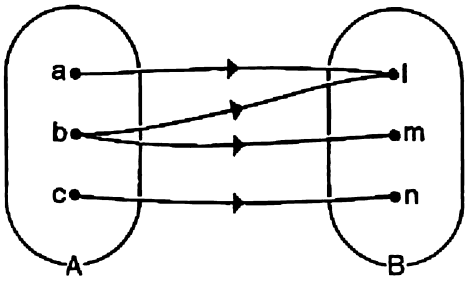


Fig. 3

illustrata dalla figura 1, si ha $f(a) = m$, $f(b) = m$, $f(c) = n$, $f(d) = o$, $f(e) = q$.

Vediamo ora alcuni esempi di applicazioni.

a) Prendiamo come dominio e come codominio l'insieme Q dei numeri razionali e consideriamo l'applicazione che raddoppia il valore, cioè:

$x \to 2x$

La scrittura con cui abbiamo indicato questa applicazione è molto espressiva: qui x indica un numero variabile, e viene messa in evidenza la legge che fa passare da x al suo corrispondente. Occorre fare attenzione: *le scritture* $x \to 2x$ *e* $y \to 2y$ *individuano la stessa applicazione* perché quello che importa non è la lettera con cui si indica il numero variabile (x, y o un'altra lettera ancora), ma la legge della corrispondenza.

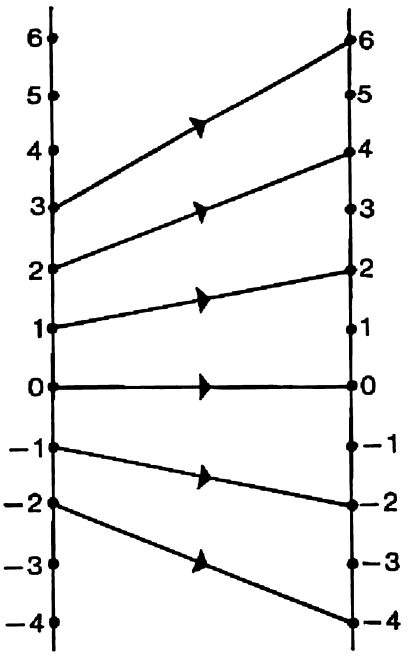


Fig. 4

Del resto, si potrebbe anche individuare la nostra applicazione con il simbolo

$\square \longrightarrow 2\square$

dove si pensa che la casella vuota possa essere riempita con un numero qualunque.

b) La relazione $x \to 2x^2 + 3x + 1$ è un'applicazione. Ad esempio, facendo $x = \frac{1}{2}$, si ha $\frac{1}{2} \to 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\frac{1}{2} + 1 = 3$. Qui l'applicazione è dunque definita da un polinomio nella variabile x.

c) Anche le espressioni fratte definiscono applicazioni. Ad esempio, la relazione

$$x \to \frac{1}{x-1}$$

definisce un'applicazione che ha come dominio $\mathbf{R} \setminus \{1\}$. (Teniamo presente che per $x = 1$ il denominatore si annulla...).

d) Ci possiamo chiedere se le operazioni di addizione e di moltiplicazione definite in **Q** (vedi capitolo 8°) possono essere considerate come applicazioni. Occorre tenere presente che per fare una addizione occorre assegnare *due* numeri (gli addendi); analogamente, per fare una moltiplicazione occorre assegnare i due fattori. Quindi sia l'addizione che la moltiplicazione fanno passare da una coppia di numeri ad un numero; ad es.:

$$(3, 2) \to 3 + 2 = 5 \quad ; \quad (3, 2) \to 3 \cdot 2 = 6$$

Concludiamo che l'addizione e la moltiplicazione sono applicazioni di $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ (prodotto cartesiano) in **Q**. Analoga affermazione si può fare quando l'addizione e la moltiplicazione vengono considerate in **R**.

Esercizi

1 Dati gli insiemi $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b\}$, determinare tutte le possibili applicazioni di A in B e disegnare i relativi grafici.

2 Considerare l'applicazione f di Q in $Q : x \to 3(x - 1)$. Calcolare $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

3 Data l'applicazione f di R in R: $x \to \frac{1}{9} x^2 - 4$, calcolare il valore che essa assume nei punti: -3, $\sqrt{2} - 3$, $\frac{3}{10}$.

4 Una società per il noleggio delle auto permette ai suoi clienti di scegliere fra le seguenti condizioni:

I) L 5000 di spesa fissa, piú L 60 per ogni km percorso.

II) L 8000 di spesa fissa, piú L 40 per ogni km percorso.

Esprimere la spesa in funzione dei km x percorsi e decidere quale delle due condizioni è piú conveniente, sulla base della lunghezza del percorso.

Applicazioni iniettive, applicazioni surgettive. Applicazione inversa

12.2 Le applicazioni possono essere classificate in base a certe proprietà molto importanti. Cominciamo con un esempio: quello dell'applicazione che fa corrispondere ad ogni automobile immatricolata in una certa provincia il suo numero di targa. È importante che non vi siano due (o piú) automobili con lo stesso numero di targa (altrimenti, in caso di infrazione al codice stradale, non sarebbe possibile risalire in modo sicuro al colpevole attraverso il numero di targa).

Questo esempio chiarisce una importante proprietà che può avere un'applicazione: un'applicazione di un insieme A in un insieme B *si dice* **iniettiva** *se manda elementi distinti in elementi distinti.*

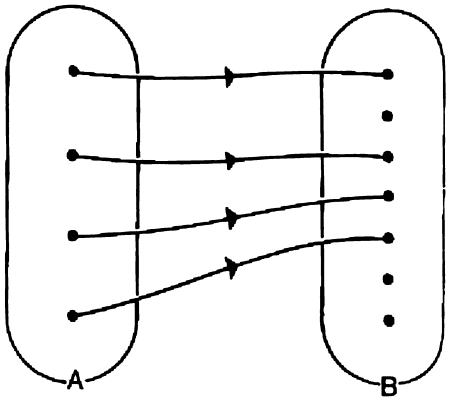


Fig. 5

Ad esempio, l'applicazione della figura 1 non è iniettiva perché vi sono due elementi distinti dell'insieme A, cioè a e b, che vengono portati in uno stesso elemento: m. L'applicazione descritta dalla figura 5 è invece iniettiva.

Esempi:

a) L'applicazione di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{Q}$ cosí definita: $x \to 3x + 1$ è iniettiva. Infatti, fissato un qualunque valore y, supponiamo che x' ed x'' vengano mandati entrambi in y. Allora si ha:

$$3x' + 1 = y \;\; ; \;\; 3x'' + 1 = y$$

Da queste relazioni si ricava $3x' + 1 = 3x'' + 1$ e, semplificando, $3(x' - x'') = 0$, da cui $x' = x''$. Dunque, fissato y, vi è un unico elemento di $\mathbf{Q}$

da cui esso proviene. Questo appunto significa che la nostra applicazione è iniettiva.

b) Consideriamo l'applicazione di **R** in **R**: $x \to x^2$. Questa *non è iniettiva* perché se si prende un qualsiasi numero positivo, esso proviene da *due* valori distinti, di segno opposto; ad esempio 9 proviene da 3 e da -3 . In generale, un valore $y > 0$ proviene da $\sqrt{y}$ e da $-\sqrt{y}$.

Vediamo un'altra proprietà molto importante per le applicazioni. Sia f un'applicazione di A in B: se accade che *ogni elemento di B è il corrispondente di qualche elemento di A si dice che f è* **surgettiva.**

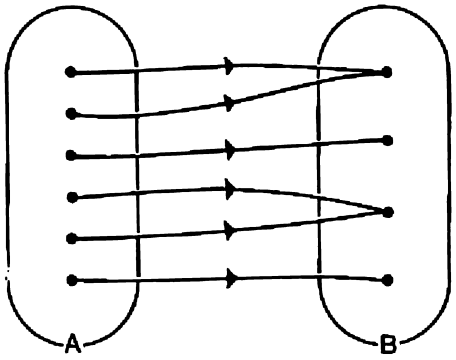


Fig. 6

Per fare un esempio concreto (anzi, concretissimo) supponiamo che A sia un insieme di panini e B un insieme di ragazzi e supponiamo che l'applicazione f abbia questo significato: $x \to y$ vuol dire che il panino x viene dato al ragazzo y . Dire che l'applicazione è surgettiva è come dire che nessun ragazzo rimane senza panino (e può accadere che qualcuno ne riceva due o piú). Se si dice invece che l'applicazione è iniettiva, ciò significa che nessun ragazzo riceve piú di un panino (e può anche accadere che qualcuno rimanga senza).

L'insieme di tutti i valori che assume l'applicazione f si dice anche **immagine** di A (secondo la f) e si indica con $f(A)$; dunque, il fatto che f sia *surgettiva* si può anche esprimere dicendo che l'*immagine di A coincide con B* .

Consideriamo ancora l'esempio *a*): l'applicazione di **Q** in **Q**: $x \to 3x + 1$ è anche surgettiva; per dimostrarlo, verifichiamo che, per ogni y *esiste* x tale che $3x + 1 = y$; infatti questa relazione si può vedere come un'equazione nell'incognita x; risolvendola, si ricava $x = \frac{1}{3}(y - 1)$. L'applicazione dell'esempio *b*): $x \to x^2$ non è neppure surgettiva; infatti, se si prende un valore $y < 0$ non c'è nessun x tale che $x^2 = y$: ciò perché, come

abbiamo già visto, il quadrato di un qualunque numero è ≥ 0.

Un'applicazione f di A in B che sia nello stesso tempo *iniettiva* e *surgettiva* si dice **bigettiva.** Se f è bigettiva, ogni elemento di B proviene da uno ed un solo elemento di A; si dice allora che f pone una **corrispondenza biunivoca** fra A e B.

Il fatto che fra due insiemi si possa porre una corrispondenza biunivoca è molto importante: esso ci dice, in termini intuitivi, che i due insiemi sono egualmente numerosi. Se l'applicazione f di A in B è iniettiva, ciò significa che il numero degli elementi di B è maggiore o uguale del numero degli elementi di A; se l'applicazione f è surgettiva, ciò significa che il numero degli elementi di A è maggiore o uguale al numero degli elementi di B. (Per fissare le idee, pensare ancora all'esempio dei panini e dei ragazzi).

È interessante notare che queste nozioni si possono applicare anche al caso di insiemi A e B infiniti: quindi si può arrivare a confrontare la « numerosità » (il termine tecnico è: il **numero cardinale**) di due insiemi infiniti. Ma queste cose sono per ora un po' premature e riguardano un livello piú approfondito di studi matematici.

Se un'applicazione f di un insieme A in un insieme B è bigettiva, si può far corrispondere ad ogni elemento di B l'unico elemento di A da cui esso proviene. Si ottiene cosí un'applicazione di B in A che si dice **applicazione inversa** della f.

Ritorniamo nuovamente all'esempio *a*); abbiamo già visto che l'applicazione di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{Q}$: $x \to 3x + 1$ è iniettiva e surgettiva, dunque è bigettiva. L'applicazione inversa è quella che fa passare da un valore y al valore x tale che $3x + 1 = y$. Quindi, secondo i calcoli che abbiamo già fatto, l'applicazione inversa è $y \to \frac{1}{3}(y - 1)$.

Riprendiamo ancora l'esempio *b*). Se invece di prendere come dominio e codominio $\mathbf{R}$, prendiamo $\mathbf{R}^+$ (insieme dei numeri reali ≥ 0), l'applicazione $x \to x^2$ diventa bigettiva perché, dato un numero $y \geq 0$ esiste uno ed un solo $x \geq 0$ tale che $x^2 = y$. Infatti, i valori x reali tali che $x^2 = y$ sono due: $\sqrt{y}$, $-\sqrt{y}$, che sono distinti se è $y > 0$. Ma limitando il dominio della nostra applicazione a $\mathbf{R}^+$, il valore $-\sqrt{y}$ viene escluso, e rimane solo il valore $\sqrt{y}$.

In conclusione: l'applicazione di $\mathbf{R}^+$ in $\mathbf{R}^+$: $x \to x^2$ ammette un'applicazione inversa che è data da $y \to \sqrt{y}$.

Esercizi

1 L'applicazione di $\mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}$: $x \to 3x + 1$ è iniettiva? è surgettiva? (Ricordare che $\mathbf{Z}$ è l'insieme degli interi relativi). Confrontare col caso, già studiato, in cui l'applicazione $x \to 3x + 1$ ha come dominio e codominio Q.

2 Sia A un insieme *finito* e sia f un'applicazione di A in A. Rendersi conto (facendo una figura ed impiegando un po' di buonsenso) che se f è iniettiva, è anche surgettiva, e se f è surgettiva, è anche iniettiva.

3 Considerare un'applicazione di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ data dalla legge: $x \to ax + b$, dove a e b sono numeri assegnati. In quale caso essa è iniettiva, in quale caso surgettiva? (Si troverà che se è surgettiva è anche iniettiva, e viceversa).

12.3 Vediamo ora un'altra nozione importante. Fin da quando abbiamo studiato i grafi di calcolo, ci siamo familiarizzati a grafi come questo:

La composizione delle applicazioni

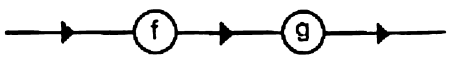


Fig. 7

Consideriamo, ad esempio, il caso di applicazioni con dominio e codominio uguali a $\mathbf{Q}$, e sia:

$f : x \to 3x + 1 \qquad g : y \to y^2$

Per interpretare concretamente il grafo della figura 7, possiamo pensare che ad un tavolo ci sia un ragazzo che ha ricevuto l'incarico di calcolare la f: egli riceve dall'insegnante un numero qualsiasi, lo moltiplica per 3 e aggiunge al risultato 1. Ad esempio:

$$2 \to 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$-1 \to -3 + 1 = -2$$

$$\frac{1}{6} \to 3 \cdot \frac{1}{6} + 1 = \frac{3}{2}$$

.....

Ad un secondo tavolo c'è un ragazzo che ha ricevuto l'incarico di calcolare la g. Egli riceve un numero e ne fa il quadrato. Ad esempio:

$$3 \to 9$$

$$2 \to 4$$

$$\frac{2}{5} \to \frac{4}{25}$$

.....

Supponiamo ora di affiancare i tavoli e supponiamo che il primo ragazzo passi al secondo il numero che ha ottenuto come risultato; il secondo ragazzo prende questo numero come dato e fa il calcolo. Ad esempio:

$$2 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{g} 49$$

$$-1 \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g} 4$$

$$\frac{1}{6} \xrightarrow{f} \frac{3}{2} \xrightarrow{g} \frac{9}{4}$$

.....

Dunque, al numero fornito dall'insegnante al primo ragazzo possiamo fare corrispondere il numero ottenuto dal secondo ragazzo come risultato:

$$2 \to 49$$
$$-1 \to 4$$
$$\frac{1}{6} \to \frac{9}{4}$$

L'applicazione che otteniamo è l'applicazione **composta** della f e della g (in questo ordine). Vogliamo trovare l'espressione di questa applicazione:

basta tener presente che il secondo ragazzo fa il quadrato del numero y che riceve. Se x è il numero che l'insegnante fornisce al primo ragazzo, il secondo ragazzo riceve il numero $3x + 1$ e ne fa il quadrato. Il risultato è $(3x + 1)^2$.

Quindi l'applicazione composta della f e della g è

$$x \to (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

In generale, supponiamo che f sia un'applicazione che manda un insieme A in un insieme B, e che g sia un'applicazione che manda l'insieme B in un insieme C. Allora, l'applicazione composta di f e g (secondo il grafo della fig. 7) è l'applicazione

$$x \to g[f(x)]$$

La figura 8 chiarisce in modo espressivo la nozione di applicazione composta. L'applicazione composta di f con g si indica con $g \circ f$ (notiamo che *si segna a destra l'applicazione che viene eseguita per prima, rispecchiando la scrittura* $g[f(x)]$. L'operazione che associa alla coppia di applicazioni (f, g) l'applicazione $g \circ f$ si dice **composizione.**

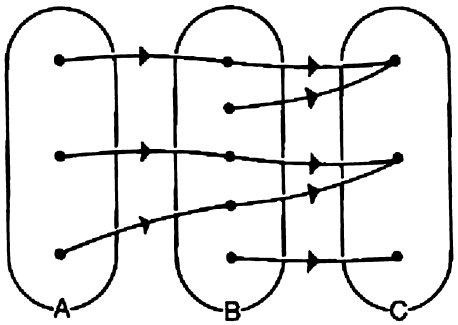


Fig. 8

Consideriamo ora l'insieme di tutte le applicazioni che hanno come dominio e codominio un insieme fissato A. La composizione, nell'insieme di queste applicazioni, è un'operazione molto importante, che ha analogia con le operazioni al-

gebriche (tanto che qualcuno la chiama **prodotto di composizione**). Ma occorre stare attenti: in generale, *la composizione non è commutativa.* Per rendercene conto, consideriamo ancora le applicazioni $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ così definite:

$$f : x \to 3x + 1 \quad ; \quad g : y \to y^2$$

Abbiamo visto che è $g \circ f : x \to (3x + 1)^2$, mentre si ha $f \circ g : y \to 3y^2 + 1$.

Si verifica subito che queste due applicazioni sono diverse fra loro: ad esempio $g \circ f$ manda 2 in 49, mentre $f \circ g$ manda 2 in 13.

Dato sempre un insieme A, si dice **applicazione identica** (o **identità**) di A l'applicazione i_A che fa corrispondere ad ogni elemento di A l'elemento stesso, cioè l'applicazione: $x \to x$. L'applicazione identica è una di quelle... banalità matematiche (come l'insieme vuoto, lo zero ecc.) che nessuno userebbe mai nella vita di ogni giorno. Ad esempio, nessuno, nella vita di ogni giorno, chiamerebbe spostamento un'operazione in cui non si muove nulla, o chiamerebbe viaggio il restare seduto sulla propria poltrona. Invece, nel discorso matematico, l'applicazione identica è molto importante: è *l'elemento neutro* rispetto alla operazione di composizione, cioè si ha: $f \circ i_A = f = i_A \circ f$.

Vediamo ora come, facendo uso dell'applicazione identica, siamo in grado di esprimere con simboli le proprietà caratteristiche dell'applicazione inversa di un'applicazione assegnata.

Siano A e B insiemi e sia f un'applicazione biettiva di A in B. Sia g l'applicazione inversa di f. Allora, preso un qualsiasi elemento x di A, e posto $y = f(x)$, si ha $g(y) = x$, cioè $g[f(x)] = x$. Questo significa che $g \circ f = i_A$ (identità di A). Analogamente, si ha che $f \circ g = i_B$ (identità di B).

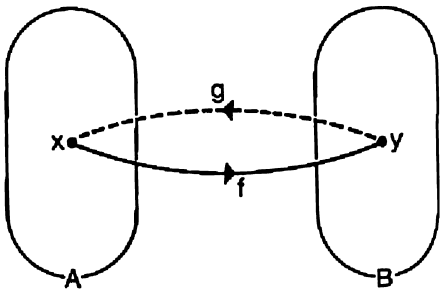


Fig. 9

Queste due relazioni che abbiamo trovato ci di-

cono in modo molto efficace che f e g sono l'una inversa dell'altra.

Per concludere, vediamo un caso interessante in cui un'applicazione di un insieme in sé ammette l'inversa. Consideriamo l'operazione di *opposto*: $x \to -x$. Eseguendo due volte questa operazione si ottiene l'identità: infatti $-(-x) = x$. In generale, supponiamo che h sia un'applicazione di un insieme A in sé che eseguita due volte, ci dà l'identità: $h[h(x)] = x$. Questa relazione si legge così: l'elemento x viene mandato dalla h in un elemento $y = h(x)$ che, dalla stessa h, viene rispedito al punto di partenza x. Quindi, *l'inversa dell'applicazione h esiste ed è la h stessa*!

Un'applicazione di un insieme in sé che eseguita due volte ci dà l'identità si dice **involutoria.** Nel seguito, specialmente a proposito della geometria, avremo occasione di studiare importanti applicazioni involutorie.

Esercizi

1 Trovare l'espressione dell'applicazione $g \circ f$, dove f e g sono applicazioni così definite:

$$f : x \to x + 1 \; ; \; g : y \to \frac{y}{y^2 + 1}$$

2 Idem per:

$$f : x \to x + 2 \; ; \; g : y \to y - 2$$

3 Idem per:

$$f : x \to \frac{3x + 1}{2x + 1} \; ; \; g : y \to \frac{3y - 4}{2y + 3}$$

4 Considerare l'applicazione $f : x \to \dfrac{3x + 1}{2x + 1}$, definita in $\mathbb{Q} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ (infatti per $x = -\dfrac{1}{2}$ si annulla il denominatore). Quale è l'immagine? Esiste l'applicazione inversa? (Definita nell'immagine).

5 Nell'insieme dei numeri razionali *positivi*, consideriamo l'applicazione $x \to \dfrac{1}{x}$

(è l'applicazione «reciproco»). È invertibile? Quale particolare proprietà ha?

6 L'operazione di composizione delle applicazioni è associativa? (Si tratta, in primo luogo, di rendersi conto del significato di proprietà associativa per un'operazione: vedere il capitolo 8° per quello che riguarda la proprietà associativa dell'addizione e della moltiplicazione).

12.4 Ci proponiamo di calcolare il numero delle applicazioni che si possono definire fra due insiemi finiti. Per fare un esempio concreto: supponiamo che A sia un insieme di tre oggetti: a, b, c. Ci domandiamo in quanti modi diversi essi possano essere posti in cinque cassetti. Indichiamo con $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ l'insieme dei cassetti.

Numero delle applicazioni tra insiemi finiti; impiego dei risultati ottenuti in problemi probabilistici

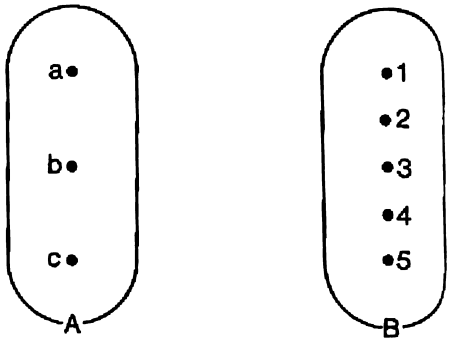


Fig. 10

Consideriamo l'oggetto a: esso può essere mandato in uno dei 5 cassetti: dunque, per quello che riguarda a, ci sono 5 possibilità diverse.

Consideriamo ora l'oggetto b: esso può essere mandato in uno qualsiasi dei 5 cassetti, indipendentemente dal modo con cui è stato collocato a. Analogamente si procede per c. Dunque, in tutto ci sono

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$$

distinte applicazioni dell'insieme A nell'insieme B. Possiamo facilmente passare a considerare una situazione generale: A sia un insieme di m oggetti, e B un insieme di n oggetti. Il numero di tutte le applicazioni di A in B è dato da

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ volte}} = n^m$$

Un altro problema interessante è quello di contare le applicazioni *iniettive* di A in B. Riprendendo l'esempio concreto esposto sopra, si tratta di ri-

porre tre oggetti in cinque cassetti, in modo che non ne vada piú di uno in ciascun cassetto. Cominciamo con l'oggetto a: esso può essere collocato in uno dei 5 cassetti; quindi ci sono 5 possibilità. L'oggetto b può essere collocato solo in uno dei 4 cassetti rimasti liberi. Quando si tratta di collocare l'oggetto c, sono stati già impegnati 2 cassetti, quindi ci sono solo 3 possibilità. Dunque, il numero delle applicazioni iniettive di un insieme di 3 elementi in un insieme di 5 elementi è

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

(naturalmente, il numero è inferiore a quello che abbiamo trovato prima per l'insieme delle applicazioni arbitrarie).

Consideriamo ora il caso generale: A è un insieme di m elementi, B un insieme di n elementi. Ovviamente, se si vuole che siano possibili applicazioni iniettive, deve essere $m \leq n$ (nell'esempio: il numero dei cassetti non deve essere inferiore a quello degli oggetti).

Possiamo ripetere, in termini generali, il ragionamento fatto:

per collocare il primo oggetto di A ci sono n possibilità

per collocare il secondo oggetto di A ci sono $n-1$ possibilità

per collocare il terzo oggetto di A ci sono $n-2$ possibilità

.....

per collocare l'm-simo oggetto di A ci sono $n - (m-1) = n - m + 1$ possibilità.

Dunque il numero delle applicazioni iniettive, che indicheremo con D_m^n, è dato dalla formula:

$$D_m^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

cioè dal *prodotto di m interi consecutivi, in ordine decrescente, a partire da n .*

Un caso interessante è quello in cui è $n = m$. In questo caso si può pensare che sia $A = B$ e che il numero cercato sia quello delle applicazioni iniettive (e quindi biunivoche) di un insieme A in sé. Le applicazioni di questo tipo vengono anche dette **sostituzioni** nell'insieme A. Il loro numero è dato da

$$n \cdot (n-1)\ (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

cioè dal prodotto dei primi n interi, a partire da 1. Questo prodotto si dice **fattoriale di** n e si scrive $n!$.

Quando n cresce, $n!$ cresce molto rapidamente.

Vediamo i primi valori:

$1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$; $7! = 5040$; $8! = 40\,320$; $9! = 362\,580$; $10! = 3\,625\,580$, ...

Vi è un altro modo, molto interessante, per calcolare il numero delle applicazioni iniettive di un insieme A in un insieme B. Consideriamo ancora una volta, per semplicità, il caso in cui A abbia 3 elementi e B 5 elementi.

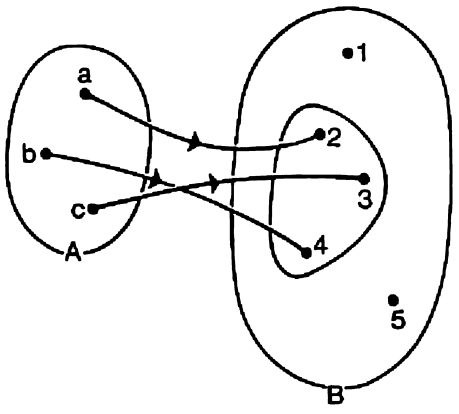


Fig. 11

Le applicazioni di A in B possono essere raggruppate in base all'immagine che hanno. Per il fatto che si tratta di applicazioni iniettive, l'immagine è composta di tre elementi. Ci chiediamo allora:

Quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi che si possono comporre nell'insieme B? Nel § 6.3 abbiamo im-

parato che il loro numero è dato dal numero di Pascal $\binom{5}{3}$.

Quante sono le applicazioni che hanno la stessa immagine?

Abbiamo visto sopra che sono in numero di $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Quindi le applicazioni iniettive sono classificabili in $\binom{5}{3}$ gruppi, ciascuno dei quali ne contiene 3! Concludiamo che deve essere:

$$D_3^5 = \binom{5}{3} 3!$$

Infatti, abbiamo trovato che è $D_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3$, $\binom{5}{3} = 10$, $3! = 6$, e si vede subito che il conto torna.

Questo discorso può essere fatto in generale: supponiamo che A abbia m elementi e B n elementi (con $m \leq n$). Le applicazioni iniettive di A in B possono essere raggruppate in $\binom{n}{m}$ sottoinsiemi formati da applicazioni aventi la stessa immagine. Ognuno di questi sottoinsiemi comprende $m!$ applicazioni. Possiamo concludere che:

$$D_m^n = \binom{n}{m} m!$$

Ci importa ricavare da questa formula $\binom{n}{m}$; dividendo per $m!$ ricaviamo:

$$\binom{n}{m} = \frac{D_m^n}{m!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m \cdot (m-1)\ (m-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

Ad esempio:

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \quad ; \quad \binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Questi numeri erano stati già calcolati col triangolo di Pascal; la nostra formula ci dà modo di calcolarli direttamente, senza bisogno di calcolare prima tutti i numeri delle righe precedenti.

Con la formula ottenuta, possiamo risolvere facilmente alcuni problemi di probabilità. Ad esempio:

Quale è la probabilità di vincere un terno al lotto? (Ricordiamo che nel gioco del lotto si estraggono a sorte 5 numeri compresi fra 1 e 90: l'ordine di estrazione non conta).

Le cinquine che si possono estrarre sono gli eventi elementari, tutti equiprobabili. Il numero delle cinquine è:

$$\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Il numero delle cinquine favorevoli, cioè contenenti i tre numeri giocati, è uguale al numero dei modi con cui si può completare la cinquina con altri due numeri che, naturalmente, devono essere scelti fra gli 87 rimanenti. Dunque, il numero dei casi favorevoli è

$$\binom{87}{2} = \frac{87 \cdot 86}{2 \cdot 1}$$

Perciò la probabilità di vincere un terno è

$$\frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11 \cdot 748} \simeq 0{,}000085$$

Calcoliamo ora la somma x che dovrebbe essere pagata al vincitore di un terno se il gioco del lotto fosse equo, supponendo che la giocata sia di 100 lire.

Indichiamo con p la probabilità di vincita che abbiamo ora calcolato.

In caso di vincita, il giocatore vince $x - 100$ lire (dal momento che occorre detrarre dal premio l'importo della giocata). Quindi la vincita media è $(x - 100)\, p$.

Nel caso, assai piú probabile, che il terno non esca, il giocatore perde la giocata, cioè 100 lire; poiché la probabilità di questo evento è $1 - p$, la perdita media è $100\,(1 - p)$. Se il gioco fosse equo, la vincita media e la perdita media sarebbero uguali:

$(x - 100)\, p = 100\,(1 - p)$, da cui

$x \cdot p = 100$

Il premio pagato per una giocata di 100 lire dovrebbe essere dunque di lire

$$x = \frac{100}{p} = 100(11\,748) = 1\,174\,800$$

Dalle tabelle del lotto ricaviamo invece che la somma versata per la vincita di un terno è di L 425 000.

Il gioco del lotto dunque non solo non è equo,
ma è particolarmente ingiusto.

Vocaboli e simboli

applicazione, funzione, trasformazione
dominio, codominio
valore, immagine
$x \to f(x)$
(applicazione) iniettiva
» **surgettiva**
» **bigettiva**
corrispondenza biunivoca
applicazione inversa
composizione
applicazione identica (*o* **identità**)
» **involutoria**
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)\ n$ **(fattoriale di** n**)**
sostituzione

Esercizi

1 Si consideri l'applicazione di $\mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}$ così definita: $x \to ax + b$, dove a e b sono elementi di $\mathbf{Z}$ (cioè interi relativi). Come devono essere presi a e b affinché questa applicazione sia bigettiva?

2 Studiare l'applicazione di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{Q}$ $x \to 3x - 4$. Vi è qualche punto che viene trasformato in sé? (Questi punti si chiamano «punti fissi»).

* **3** Vi sono applicazioni di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ del tipo $x \to ax + b$ che non hanno punti fissi?

4 L'applicazione $x \to \frac{4}{x}$, definita in $R \setminus \{0\}$, ha punti fissi?

* **5** Nell'insieme di 4 elementi $\{a, b, c, d\}$ considera la sostituzione s:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c & a & d & b \end{array}$$

Rappresenta esplicitamente la sostituzione che si ottiene componendo s con se stessa ripetutamente: $s \circ s$, $s \circ s \circ s$, ecc. Che cosa osservi? Prendi un'altra qualsiasi

sostituzione nello stesso insieme e ripeti la prova. Saresti in grado di trarne qualche conclusione valida in generale, cioè per un insieme avente un numero n qualunque di elementi, e per una sostituzione qualunque?

6 10 ragazzi partecipano ad una gara in cui i primi tre vengono classificati. Quali sono le possibili classifiche?

7 Quale è la probabilità di vincere un ambo al lotto? Quale la probabilità di vincere una quaterna?

8 Con quanti zeri termina la rappresentazione decimale di 38!?

9 Ripongo a caso 5 oggetti in 5 cassetti. Quale è la probabilità che in ogni cassetto capiti un solo oggetto?

* **10** Da un mazzo di 52 carte da gioco si estraggono a caso 3 carte.
Quale è la probabilità che fra esse vi sia esattamente un asso?
(Si ricorda che gli assi sono 4). Quale è la probabilità che fra esse vi sia almeno un asso?
Disponendo di una piccola calcolatrice, fare il calcolo approssimato.

I seguenti esercizi riguardano aspetti intuitivi della geometria. Essi possono essere svolti sulla base di quanto studiato nella scuola media e servono a preparare per lo studio che faremo nelle prossime lezioni.

11 Un cane è legato ad una catena lunga 10 m; la catena ha l'estremità che può scorrere su un filo di ferro teso fra due punti A, B distanti fra loro 15 m. Descrivere (con un disegno, ed anche a parole) la figura formata dai punti che il cane può raggiungere e calcolarne l'area.

12 Le due regioni A, B tratteggiate nella figura qui sotto rappresentano due piccole isole vicine. Tracciare i confini delle seguenti zone di mare:

a) zona da cui si vede solo l'isola A;
b) zona da cui si vede solo l'isola B;
c) zona da cui A e B si vedono distinte;
d) zona da cui A e B si vedono addossate l'una all'altra.

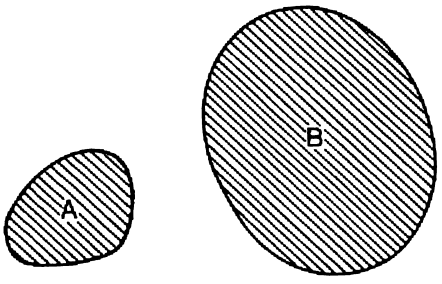


Fig. 12

13 Fra tutti i triangoli di cui sono assegnati due lati quale è quello di area massima?

* **14** Togliere da un quadrato una parte, come in figura. È possibile scomporre la rimanente parte in quattro figure fra loro uguali (cioè sovrapponibili) ?

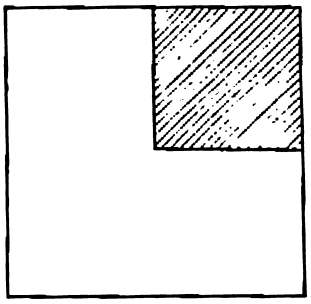


Fig. 13

13

Per la via piú breve...

13.1 Una tabella delle distanze stradali fra le principali città italiane ci fornisce i dati qui riportati: **La nozione di distanza**

distanza fra:

Milano e Roma: 626 km
Roma e Napoli: 232 km
Milano e Napoli: 858 km
Milano e Torino: 139 km
Torino e Roma: 700 km

Questi dati ci suggeriscono alcune osservazioni molto interessanti: notiamo, ad esempio, che la distanza fra Milano e Napoli è esattamente la somma delle distanze fra Milano e Roma e fra Roma e Napoli: $626 + 232 = 858$. Basta un'occhiata alla carta geografica per spiegare questa coincidenza: la strada piú breve fra Milano e Napoli passa per Roma.

Per abbreviare la scrittura, indichiamo le città della nostra tabella con la lettera iniziale e scriviamo d per distanza: ad esempio, $d(T, M)$ indica la distanza fra Torino e Milano. Continuando le nostre osservazioni scopriamo che si ha:

$$d(T, R) < d(T, M) + d(M, R)$$

Infatti, è:

$$700 < 139 + 626 = 765$$

Anche questo risultato è ben comprensibile: per andare da Torino a Roma si può passare per Milano e, in questo caso, la lunghezza del percorso sarà uguale alla somma dei due tratti, cioè 765 km, ma si ha a disposizione anche una via piú breve, che fa risparmiare 65 km. In nessun caso la distanza fra una città A ed una città C può superare la somma delle distanze di A da una certa città B e di B da C: se la superasse, la distanza fra A e C non sarebbe piú la lunghezza del cammino piú breve, come noi vogliamo che sia. Dunque, sempre indicando con d la distanza, riteniamo che debba valere in ogni caso la disuguaglianza:

$$d(A\,,\,C) \leq d(A\,,\,B) + d(B\,,\,C) \qquad (1)$$

La nozione di distanza come lunghezza del cammino piú breve si applica a tante situazioni diverse.

Ad esempio, supponiamo di considerare una città, con la rete stradale indicata nella pianta. Le strade si intersecano ad intervalli di 100 m. La distanza fra il punto A e il punto C (fig. 1) è di 700 m. In questo caso ci sono molti cammini fra A e C che hanno la lunghezza minima (cioè 700 m). Anche per la nostra rete stradale, indicando con $d(A\,,\,C)$ la lunghezza del cammino piú breve fra due punti $A\,,\,C$ qualunque, vale necessariamente la disuguaglianza (1).

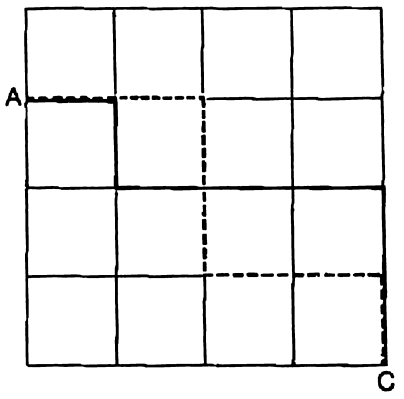


Fig. 1

Consideriamo ancora un esempio: in una pianura c'è un lago di forma circolare, che si può costeggiare ma non attraversare. Quale è il cammino piú breve che congiunge due punti $A\,,\,C$? È chiaro che, se il tratto rettilineo fra A e C non incontra il lago, esso sarà il cammino piú breve, altrimenti il cammino piú breve comprenderà un certo tratto che costeggia il lago, come in figura. Non sarebbe facile calcolare la lunghezza del cammino piú breve: comunque, è certo che, definendo la distanza fra due punti come la piú breve

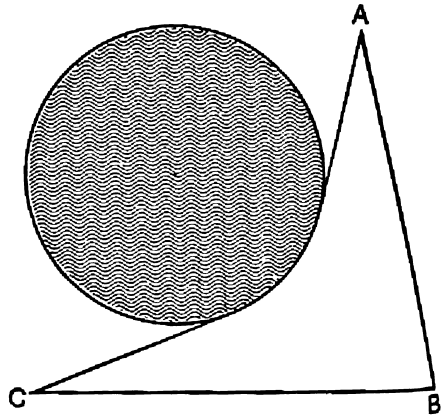


Fig. 2

fra le lunghezze dei percorsi che li congiungono, deve valere la disuguaglianza (1).

Come ulteriore esempio, prendiamo un mappamondo e consideriamo la rotta di un «jet» fra Roma e New York: per vederla con precisione, prendiamo uno spago e tendiamolo fra i due punti. Scopriremo (forse con una certa sorpresa) che la rotta non rimane vicina al parallelo (anche se la latitudine di Roma non differisce molto da quella di New York), ma si porta molto piú a Nord.

Il minimo cammino su una sfera è un arco di cerchio massimo (come si sa, si dice cerchio massimo di una sfera il cerchio che si ottiene come intersezione della sfera con un piano passante per il centro). Adottando come distanza fra due punti della Terra la lunghezza del minimo cammino «jet» che li congiunge, troviamo che vale ancora necessariamente la (1).

La nozione di distanza, di cui abbiamo dato qualche esemplificazione, ha una portata molto generale. In certi casi, ad esempio, si può intendere per distanza il minimo tempo che si può impiegare (con un certo mezzo) per andare da un punto all'altro. Di questo tipo è la distanza dei montanari, che si esprime in ore di cammino (l'asperità del terreno renderebbe poco significativa la misura in chilometri). È curioso il fatto che anche gli astronomi esprimano le loro distanze con un tempo (gli «anni-luce»).

Esercizi

1 Nell'esempio della figura 1, contare il numero dei cammini di lunghezza minima fra il punto *A* e il punto *C*. (Procedere man mano contando i cammini che da *A* arrivano a tutti i punti intermedi: la tecnica è simile a quella usata nel § 6.1 e nel § 7.3 per contare i cammini; si troverà che, nel caso della figura 1, i cammini sono 35).

2 Nell'esempio della figura 2 è sempre unico il cammino di minima lunghezza fra due punti?

3 Quale è il cammino piú breve che, sulla superficie di un cubo, congiunge due vertici opposti? È unico? Descriverlo e calcolarne la lunghezza.

* **4** (Variante dell'esercizio precedente). Trovare il cammino piú breve che congiunge due vertici opposti sulla superficie di un prisma retto con base quadrata di lato 1 e con altezza k.

5 Come verifica del risultato trovato risolvendo l'esercizio 3, dimostrare per via algebrica che è $\sqrt{5} < 1 + \sqrt{2}$.

** **6** Due città A, B distano fra loro 300 km. Una terza città C dista 160 km da A e 180 da B. Dimostrare che occorre fare almeno 20 km per raggiungere da C un punto della strada che collega A con B. (Qui le distanze sono tutte prese sulla rete stradale).

7 Due punti A e B distano 12 cm. Un punto P ha distanza dal punto A tripla della distanza dal punto B. Fra quali limiti può variare la distanza di P da B? (Indicare con x questa distanza).

8 Se vale la (1), la differenza fra le distanze che due punti A e C hanno da un terzo punto non può superare la distanza che c'è fra A e C.
(Questa proprietà — che è una semplice conseguenza della (1) — ha un forte significato intuitivo: ripensare alla distanza fra le città...).

Assiomi e teoremi. Gli assiomi della distanza. Il cerchio

13.2 La geometria, di cui ora cominciamo ad occuparci, è la scienza dello spazio: essa è, in un certo senso, la piú elementare delle scienze fisiche perché cerca di cogliere le proprietà piú semplici e piú profonde dell'ambiente che ci circonda. Durante la scuola media abbiamo già studiato la geometria dal punto di vista intuitivo: lo studio consisteva nel mettere in evidenza tante proprietà, certamente interessanti, ma non molto legate fra loro. Ora vogliamo procedere con un metodo che, dal punto di vista scientifico, è molto piú incisivo: *ammesse alcune proprietà fondamentali, vogliamo dedurre da esse, mediante il ragionamento, tutte le altre proprietà che ci interessano.*

Quando si fa un ragionamento, si stabilisce la verità di un'affermazione sulla base di altre affermazioni che si suppongono vere: non si può dunque fare a meno di ammettere alcune affermazioni non dimostrate, su cui tutte le altre si appoggiano cosí come un edificio si appoggia sulle fondazioni. Queste affermazioni primitive da cui tutte le altre si possono dedurre si dicono

assiomi (o anche **postulati**). Gli assiomi possono essere scelti con una certa libertà, ma devono avere una grande evidenza intuitiva, almeno se vogliamo che la geometria offra una descrizione fedele dello spazio che ci circonda. Le affermazioni che si dimostrano si dicono **teoremi**.

Durante questo corso di matematica, abbiamo già fatto in varie occasioni delle piccole dimostrazioni. Anzi, le proprietà 1)-9) dell'addizione e della moltiplicazione che abbiamo introdotto nell'8° capitolo possono essere considerate come assiomi da cui si può dedurre tutto il calcolo delle espressioni (come abbiamo fatto nel 9° capitolo).

Nell'ambito della geometria, però, occorre svolgere le dimostrazioni in modo piú sistematico: a poco a poco, dovremo imparare a condurre una dimostrazione senza perderci...

Il paragrafo precedente ha già rivelato abbastanza bene le nostre intenzioni: il nostro punto di partenza per lo studio di uno spazio S è l'introduzione di una **distanza**. Il modo preciso di fare ciò è fornito dal seguente assioma:

A1 (Assioma) *Per tutte le coppie di punti* P, Q *dell'insieme* S *è assegnato un numero reale* ≥ 0, *che si dice* **distanza** *di* P *da* Q *e si indica con* $d(P, Q)$. *La distanza ha le seguenti proprietà*:

I) *Se i punti* P, Q *sono distinti è* $d(P, Q) > 0$, *se coincidono è* $d(P, Q) = 0$.

II) $d(P, Q) = d(Q, P)$ (*proprietà di* **simmetria**).

III) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ (**disuguaglianza triangolare**).

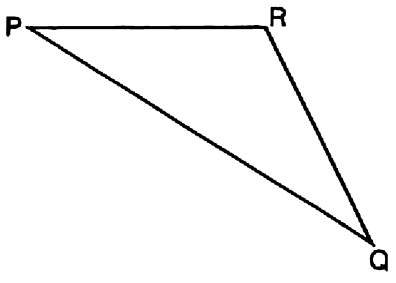


Fig. 3

La disuguaglianza triangolare è stata già trovata nel corso di geometria intuitiva a proposito della possibilità di costruire un triangolo di lati assegnati (di qui, appunto, il nome); nel § precedente formula (1) abbiamo visto che essa si presenta

in modo naturale tutte le volte che la distanza fra due punti ha il significato di « lunghezza minima dei cammini che li congiungono ».

La proprietà I) ci dice che due punti hanno distanza nulla quando coincidono, e solo in quel caso.

Anche la proprietà II) è molto naturale: ad esempio, le tabelle che riportano le distanze stradali fra le città, di solito contengono una sola coppia di nomi: infatti, una volta scritta la distanza fra Milano e Roma, è inutile riportare quella fra Roma e Milano... Per capire meglio questa proprietà, possiamo considerare delle situazioni concrete in cui essa non sarebbe vera: ad esempio, la « distanza del montanaro » non è simmetrica (e quindi non è una distanza in senso proprio); infatti se per salire su una cima occorrono 5 ore, per la discesa ne possono bastare 3...

Notiamo che *la distanza è definita per tutte le coppie* (P, Q) *di* S, *e quindi si può considerare come una funzione definita nel prodotto cartesiano* $S \times S$, *a valori reali* (*cioè avente come codominio l'insieme dei numeri reali*). Un insieme S in cui sia assegnata una distanza (e cioè valga l'assioma A1) si dice uno **spazio**. (Abbiamo già usato questa parola, ed abbiamo già usato la parola **punto** per indicare un suo elemento).

Naturalmente, come abbiamo visto nel § 13.1, si possono considerare tanti spazi (lo spazio di un vigile urbano sarà la rete stradale della città, lo spazio di un pilota di « jet » sarà la superficie sferica della Terra, ecc.). Il nostro scopo principale in queste lezioni di geometria è quello di studiare quel particolare spazio, molto ricco di proprietà, che è il **piano**. Del piano abbiamo un'idea intuitiva che ci è suggerita da tanti modelli concreti (ad esempio: la superficie di un tavolo o il pavimento di una stanza, prolungati indefinitamente). Non diremo direttamente che cosa è il piano, ma fisseremo alcune sue proprietà fondamentali attraverso gli assiomi. Quando avremo terminato

l'esposizione dei nostri assiomi, la nostra idea intuitiva di piano risulterà tradotta in termini precisi.

D'ora in poi, per indicare la distanza fra due punti A , B *del piano, useremo la notazione piú breve:* $\overline{AB}$ *anziché* $d(A, B)$.

Intanto, sulla base della sola distanza, siamo in grado di introdurre alcuni importanti sottoinsiemi del piano.

Definizione. Dato un punto O ed un numero positivo r, si dice **cerchio** di centro O e raggio r l'insieme dei punti P del piano tali che $d(O, P) = r$.

Si dice **disco** di centro O e raggio r l'insieme dei punti P del piano tali che $d(O, P) \leq r$.

Notiamo però che, nella nomenclatura corrente, si chiama spesso cerchio quello che noi abbiamo chiamato disco e si chiama circonferenza quello che noi abbiamo chiamato cerchio.

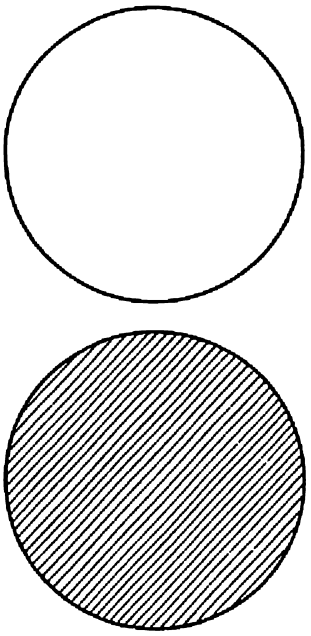


Fig. 4

13.3 Passiamo ora alla descrizione — mediante assiomi — di quei particolari sottoinsiemi del piano che sono le **rette**. Dobbiamo avere sempre presente l'idea intuitiva della retta come linea di minor percorso: da questo punto di vista, un filo teso è il modello piú efficace della retta.

Gli assiomi della retta. Le coordinate sulla retta

A2 (Assioma) *Per due punti distinti passa una ed una sola retta.*

(Volendo dire le cose in modo piú preciso, anche se un po' pedante: dati due punti qualsiasi, P e Q, con $P \neq Q$, esiste una ed una sola retta a cui appartengono sia P che Q).

Fig. 5

Facciamo ora alcune convenzioni riguardo ai simboli: *indicheremo i punti del piano con le lettere maiuscole, a carattere stampatello:* P , Q , A , B , O ... *Indicheremo le rette del piano con le lettere maiuscole a carattere corsivo:* $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ...; *diremo «retta* P Q *» per designare la retta individuata dai punti* P , Q .

Diamo ora un'importante definizione:

Due rette si dicono **incidenti** se hanno esattamente un punto in comune; altrimenti si dicono **parallele**.

Riflettiamo: due rette sono parallele se non hanno alcun punto in comune o se ne hanno piú di uno. Ma se hanno due o piú punti in comune, esse coincidono, per l'assioma A2. Dunque, per noi, *una retta deve essere considerata parallela a se stessa.* (Questa convenzione è utile, come vedremo in seguito).

Il seguente assioma ci dice che nessuna retta può esaurire tutto il piano.

A3 (Assioma) *Nel piano ci sono almeno tre punti non allineati.*

« Allineati » significa ovviamente che stanno sulla stessa retta. L'affermazione che tre punti A , B , C non sono allineati significa che se una retta ne contiene due, non contiene il terzo.

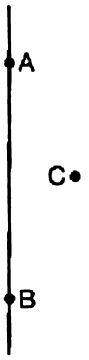


Fig. 6

La nostra idea intuitiva di retta ci suggerisce che essa può essere percorsa in due **sensi** (o **versi**) senza ritornare mai ad un punto per cui si è già passati. Fissato un senso di percorrenza, se si incontra prima il punto P e poi il punto Q, si scrive $P < Q$ (e si legge « P precede Q », oppure « Q segue P »). È naturale ammettere che questa sia una relazione di ordine (§ 10.2, proprietà *a*, *b*, *c*): anzi, è stata proprio l'idea intuitiva dell'ordinamento dei punti di una retta che ci ha portato a rappresentare i numeri razionali relativi (e poi, successivamente, i numeri reali) su una retta. Naturalmente, se si inverte il senso di percorrenza della retta, ogni relazione di ordine viene sostituita da quella opposta: invece di $P < Q$ si avrà $Q < P$.

L'assioma seguente afferma l'esistenza di queste relazioni di ordine ed enuncia un'importante proprietà che collega l'ordinamento con la distanza:

A4 (Assioma) *Su ogni retta esistono due* **relazioni di ordine, fra loro opposte,** *con questa proprietà*

Se è $A < B < C$

allora è

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \qquad (2)$$

Viceversa se, dati tre punti A, B, C *vale l'uguaglianza* (2), *allora il punto* B *è allineato con* A *e* C *e si ha* $A < B < C$, *oppure* $C < B < A$.

Una retta su cui sia stata fissata una relazione di ordine si dice retta **orientata.**

Fissata su una retta $\mathcal{R}$ una relazione di ordine ed un punto O, *l'insieme dei punti* P *tali che* $P > O$ *si dice* **semiretta** *di origine* O.

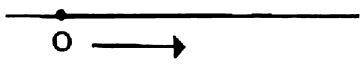


Fig. 7

Naturalmente, anche l'insieme dei punti P per cui è $P < O$ è una semiretta (quella che si ottiene considerando la relazione di ordine *opposta*, e verrà detta **semiretta opposta** alla prima).

Diciamo che il punto B della retta $\mathcal{R}$ sta fra A e C se si ha

$$A < B < C \quad \text{oppure} \quad C < B < A$$

L'insieme costituito dai punti A e C e da quelli che stanno fra loro si dice **segmento** di estremi A e C, e si indica con $[A, C]$. L'assioma A4 ci dice (anche se in modo un po'... diplomatico) che il segmento $[A, C]$ è il percorso di minima lunghezza fra A e C. Infatti, dati A e C, per un punto B qualunque vale la disuguaglianza triangolare

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$$

Il fatto che in questa relazione valga il segno di uguaglianza, come esprime la (2), ci dice — intuitivamente — che, *volendo andare da A a C non allunghiamo il cammino se passiamo per B* (ripensare ancora all'esempio della strada Milano-Roma-Napoli, che abbiamo considerato all'inizio): perciò B appartiene ad un percorso di minima lunghezza fra A e C.

Dati due punti A, C la distanza AC si chiama anche **misura** (o **lunghezza**) del segmento AC: questa denominazione è naturale perché se spezziamo il segmento in due nel punto B, la misura di $[A, C]$ è uguale alla somma delle misure dei due segmenti, come dice la (2).

A5 (Assioma) *Fissata una semiretta* $\mathfrak{u}$ *di origine* O *e fissato un numero reale positivo* x *esiste sulla semiretta un unico punto* P *tale che* $\overline{OP} = x$.

Dunque, con questo assioma *si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali positivi e i punti di una semiretta* $\mathfrak{u}$; *possiamo completare la corrispondenza associando ai numeri reali negativi i punti della semiretta opposta aventi da O distanza uguale al valore assoluto del numero e facendo corrispondere allo zero il punto O.*

In questo modo, otteniamo una corrispondenza biunivoca fra i punti di una retta e i numeri reali

$$P \longleftrightarrow x$$

Il numero x si dice **coordinata** di P. Si dice che sulla retta $\mathfrak{u}$ abbiamo stabilito un **sistema di coordinate** con **origine** O e avente come semiretta positiva la $\mathfrak{u}$.

Questa corrispondenza biunivoca fra l'insieme **R** dei numeri reali e le rette è così familiare e così conforme all'intuizione, che i matematici, come

abbiamo già detto, chiamano l'insieme **R** « retta reale ».

Gli assiomi A2-A5 ci forniscono un « identikit » delle rette, cosí come la nostra intuizione ce le presenta. Possiamo divertirci ad immaginare spazi in cui le « rette » (cioè le linee di cammino piú breve) non soddisfano piú ai nostri assiomi.

Consideriamo per esempio una rete stradale: abbiamo già notato (cfr. fig. 1) che fra due punti ci possono essere *piú* percorsi di lunghezza minima.

Può anche darsi che fra due punti non vi sia nessun percorso: ad esempio, nella rete stradale italiana, non c'è nessuna strada che collega Roma con Cagliari! In questi casi l'assioma A2 non sarebbe piú vero. Per trovare un caso in cui l'assioma A3 non sia vero, basta considerare uno spazio... che si riduca ad una sola retta: allora è chiaro che tutti i punti sono allineati.

Per mettere in crisi gli assiomi A4 e A5, basta pensare ad una superficie sferica; come « rette » si devono prendere allora i cerchi massimi. Ma su un cerchio non si può fissare in modo soddisfacente un ordinamento, per la stessa ragione per cui non lo si può fare per un gruppo di persone sedute attorno ad un tavolo (cfr. § 10.2).

La probabilità sulla retta

13.4 La retta — che noi abbiamo colto nella sua struttura geometrica, e che abbiamo poi fatto corrispondere all'insieme **R** — è uno spazio già molto interessante di per sé. Ad esempio, possiamo servirci di una retta per rappresentare il tempo. (Assumendo come origine l'istante presente, abbiamo due semirette: quella del passato e quella del futuro...). Inoltre, la retta (o un suo segmento) può servire per rappresentare certi eventi, e si può utilizzare la misura dei segmenti per definire le relative probabilità. In questo modo allarghiamo ancora una volta il raggio d'azione del calcolo delle probabilità introducendo degli esperimenti con infiniti eventi elementari. Vediamo al riguardo qualche esempio interessante:

a) Le sbarre di un passaggio a livello restano chiuse, fra le 9 e le 10, per 15 minuti. Quale è la probabilità di trovarle chiuse, passando a caso durante quell'ora?

Naturalmente, si pensa che, nell'ora fissata, tutti gli istanti siano egualmente probabili per l'arrivo. L'insieme che rappresenta l'evento « sbarre abbassate » è costituito da uno o piú intervalli (o segmenti) di ampiezza complessiva data da 15 minuti; l'intervallo di un'ora, che rappresenta l'insieme di tutti i casi possibili, misura 60 minuti.

La definizione che abbiamo dato nella prima lezione (rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili) si estende in modo naturale alla nostra situazione: si tratta di fare il rapporto fra la misura dell'insieme che rappresenta i casi che interessano (qui dovremmo parlare di... casi sfavorevoli) e la misura dell'insieme che rappresenta tutti i casi possibili:

$$\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

b) Ho un'asticciola lunga 1 m ed un'altra lunga 2 m. Rompo questa seconda in un punto a caso. Quale è la probabilità di poter costruire con le tre asticciole un triangolo?

La condizione che occorre verificare per poter costruire il triangolo, e che basta effettivamente per costruirlo, è che ciascun lato abbia misura minore della somma degli altri due (disuguaglianza triangolare).

Se il piú grande dei lati soddisfa a questa condizione, essa varrà evidentemente anche per gli altri due. Indichiamo con x la lunghezza della parte piú piccola in cui si spezza la seconda asticciola; si ha $0 \leq x \leq 1$. L'asticciola che rimane (che supera 1 m) rappresenta il lato piú grande del triangolo. Dunque la nostra condizione diventa:

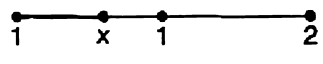


Fig. 8

$2 - x \leq 1 + x$

cioè:

$\frac{1}{2} \leq x$

L'intervallo « favorevole » è $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ che ha misura $\frac{1}{2}$; poiché l'intervallo che rappresenta tutti i casi possibili, cioè $[0, 1]$, ha misura 1, la probabilità è $\frac{1}{2}$.

Esercizi

1 Dati nel piano 6 punti, a tre a tre non allineati, quante sono le rette che li congiungono fra loro in tutti i modi possibili?

2 Siano $A, B, C, D, E, \ldots$ punti del piano. Dimostrare che $\overline{AD} \leq \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$, $\overline{AE} \leq \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}, \ldots$
(Fare un disegno).

3 Dimostrare che: data una retta $\mathfrak{R}$ ed un punto di essa M, esiste una retta diversa da $\mathfrak{R}$ che passa per M.

4 Dato un triangolo ABC prendere un punto H nel lato $[A, C]$ e un punto K nel lato $[B, C]$, con $H \neq K$. Dimostrare che il quadrilatero $ABKH$ ha perimetro minore di quello del triangolo.

* **5** Dimostrare che in un triangolo un lato ha lunghezza minore del semiperimetro.

* **6** Svoltando con la mia automobile sulla via principale, vedo che il semaforo in fondo alla via è « verde ». A quel punto mi occorrono 10 secondi per arrivare all'incrocio.
Quale probabilità ho di poter passare, se la durata del « verde » è di 30 secondi?

13.5 La nostra intuizione geometrica ci dice chiaramente che una retta spezza il piano in due distinte regioni. Pensiamo, ad esempio, ad un lungo fiume che attraversa la pianura: due località possono trovarsi dalla stessa parte, oppure da

Semipiani, angoli, poligoni

parti opposte rispetto al fiume. Quale è il criterio in base al quale si stabilisce che esse stanno dalla stessa parte? Evidentemente: che si possa andare dall'una all'altra senza attraversare il fiume.

Queste considerazioni rendono spontaneo il seguente assioma:

A6 (Assioma). *Data nel piano una retta $\mathcal{R}$, l'insieme complementare di $\mathcal{R}$ risulta suddiviso in due regioni, dette* **semipiani**, *con le seguenti proprietà:*

il segmento che congiunge due punti di uno stesso semipiano non taglia la retta $\mathcal{R}$;

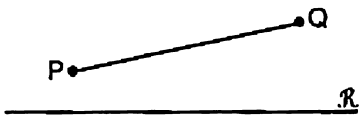


Fig. 9

il segmento che congiunge due punti di semipiani distinti taglia la retta $\mathcal{R}$.

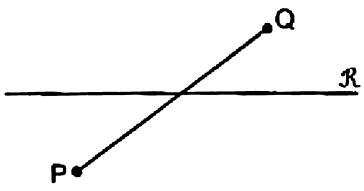


Fig. 10

Indicando con $\mathcal{A}_1$ ed $\mathcal{A}_2$ i due semipiani, il piano può essere così rappresentato come unione di tre insiemi disgiunti:

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$$

Si dice che la retta $\mathcal{R}$ è il **bordo** (o la **frontiera**) di ciascuno dei due semipiani $\mathcal{A}_1$ ed $\mathcal{A}_2$. Si dice poi che i due semipiani sono **opposti** fra loro.

Diamo alcune importanti definizioni:

Un insieme K del piano si dice **convesso** *se, presi due suoi punti P, Q, il segmento $[P, Q]$ che li congiunge è tutto contenuto in K.*

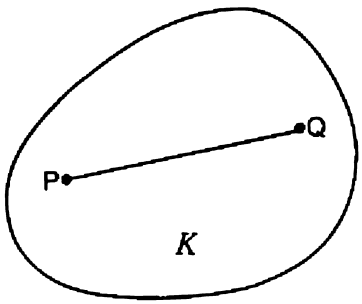


Fig. 11

È evidente che una retta, una semiretta, un segmento sono insiemi convessi. Dimostriamo ora che:

Un semipiano è un insieme convesso.

Infatti sia $\mathcal{R}$ una retta e siano $\mathcal{A}_1$ ed $\mathcal{A}_2$ i semipiani che essa genera. Prendiamo due punti P, Q di $\mathcal{A}_1$. Il segmento $[P, Q]$ non può contenere punti della retta $\mathcal{R}$, perché P e Q sono nello stesso semipiano (si dice anche: P e Q stanno dalla stessa parte rispetto alla retta $\mathcal{R}$). Ma $[P, Q]$ non può nemmeno contenere punti di $\mathcal{A}_2$ perché, se contenesse un punto M di $\mathcal{A}_2$, sul segmento $[P, M]$ ci dovrebbe essere un punto di $\mathcal{R}$, essendo P e M punti di semipiani opposti: questo punto dovrebbe appartenere evidentemente al segmento $[P, Q]$ mentre noi abbiamo escluso che in $[P, Q]$ vi possano essere punti di $\mathcal{R}$. Dunque, i punti di $[P, Q]$ non possono che appartenere ad $\mathcal{A}_1$.

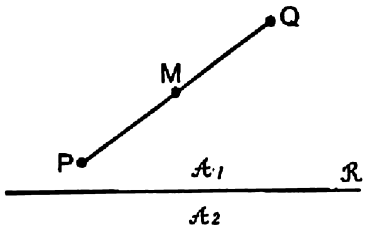


Fig. 12

Ciò prova, come volevamo dimostrare, che $\mathcal{A}_1$ è convesso.

Un altro facile teorema è il seguente:

L'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso.

Infatti, supponiamo che H e K siano due insiemi convessi del piano. Prendiamo due punti: P, Q nell'insieme $H \cap K$.

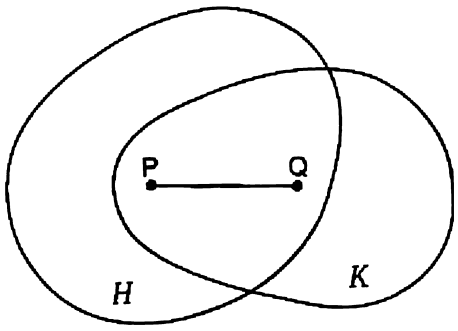


Fig. 13

Essendo H convesso, il segmento $[P, Q]$ è tutto contenuto in H.

Essendo K convesso, il segmento $[P, Q]$ è tutto contenuto in K.

Allora il segmento $[P, Q]$ è tutto contenuto in $H \cap K$. Questo dimostra che $H \cap K$ è convesso.

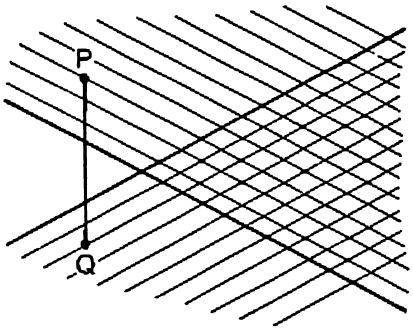


Fig. 14

In generale, *l'unione* di due insiemi convessi *non* è un insieme convesso. Basta vedere un esempio: l'unione di due semipiani generati da rette incidenti.

Definizione. Si dice **angolo** una coppia di semirette aventi la stessa origine.

L'angolo può essere indicato con la notazione $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ (dove $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ sono le semirette in questione, che vengono dette **lati** dell'angolo), oppure con la notazione $A\hat{O}B$, dove si intende che le due semirette che definiscono l'angolo sono la semiretta con origine in O contenente il punto A, e la semiretta con origine in O contenente il punto B. Quando non c'è ambiguità, un angolo col vertice in A si può indicare con $\hat{A}$. Indicheremo con OA la semiretta con origine in O contenente il punto A. Se le due semirette $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ non sono allineate, all'angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ viene associato, nel modo che ora presentiamo, un certo insieme convesso, che si può chiamare **regione angolare**, ma che usualmente è esso stesso chiamato **angolo**. Precisamente, consideriamo il semipiano individuato da $\mathcal{R}$ che contiene la semiretta $\mathcal{S}$ (evidentemente, la semiretta $\mathcal{R}$ fa parte di una retta, che è bordo di due semipiani: di questi due semipiani, scegliamo quello che contiene la semiretta $\mathcal{S}$). Alla stessa maniera, consideriamo il semipiano individuato da $\mathcal{S}$ che contiene la semiretta $\mathcal{R}$. L'intersezione di questi due semipiani è appunto l'insieme convesso che associamo all'angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$.

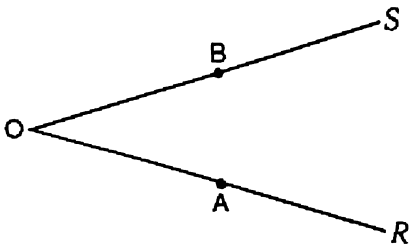


Fig. 15

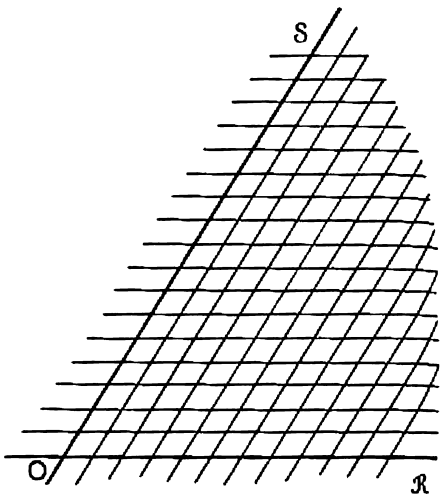


Fig. 16

Se le due semirette $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ sono semirette opposte di una stessa retta, l'angolo si dice **piatto**. Non è più individuata un'unica regione angolare, essendovi due semipiani il cui bordo contiene sia $\mathcal{R}$ che $\mathcal{S}$.

Chiamiamo **triangolo** una terna di punti non allineati: A B C (che vengono detti **vertici**). Anche questo termine geometrico comprende altri significati (sarà facile capire dal contesto a quale significato ci si riferisce): anzitutto, col termine triangolo di vertici A, B, C possiamo intendere i tre segmenti:

$$[A, B] \ ; \ [B, C] \ ; \ [C, A]$$

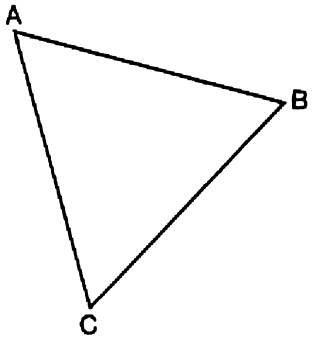


Fig. 17

che vengono detti **lati** del triangolo. (Si dice che il lato $[A, B]$ è **opposto** al vertice C).

Ma possiamo associare ai tre vertici A, B, C anche una certa regione, con il seguente procedimento:

Consideriamo le tre regioni angolari $B\hat{A}C$, $A\hat{C}B$, $C\hat{B}A$. La loro intersezione è un insieme convesso che sarà detto **regione triangolare**, oppure anch'esso **triangolo** di vertici A, B, C.

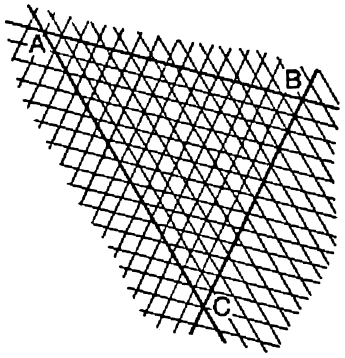


Fig. 18

Se si pensa che queste regioni angolari sono a loro volta intersezione di semipiani, si vede subito che il triangolo è l'intersezione di questi tre semipiani:

semipiano individuato dalla retta AB contenente il punto C;

semipiano individuato dalla retta BC contenente il punto A;

semipiano individuato dalla retta CA contenente il punto B.

Supponiamo ora di avere un insieme finito di punti, dati in un certo ordine; ad esempio: $A\ B\ C\ D\ E\ F$.

L'insieme ordinato dei segmenti:

$[A, B]$; $[B, C]$; $[C, D]$; $[D, E]$; $[E, F]$ (che vengono detti **lati**) si dice **spezzata** (o **poligonale**) di **vertici** A, B, C, D, E, F.

Se l'ultimo dei vertici coincide con il primo, si dice che la spezzata è **chiusa**: ad esempio

$A\ B\ C\ D\ A$

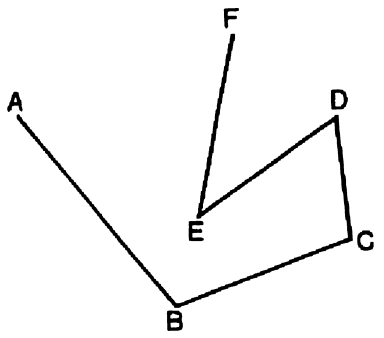


Fig. 19

(Naturalmente, una volta che sia detto che la spez-

zata è chiusa, si può evitare la ripetizione del primo vertice, e si può scrivere, ad esempio, $A\,B\,C\,D$).

Una quaterna di punti $A\,B\,C\,D$ (in ordine) si dirà **quadrangolo** (o **quadrilatero**).

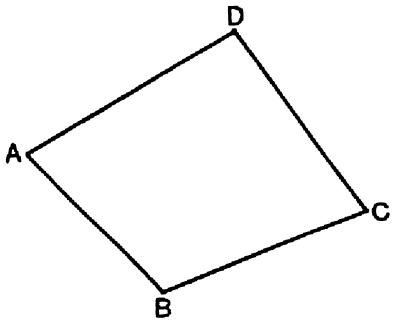


Fig. 20

A questa quaterna di punti si può anzitutto fare corrispondere una spezzata *chiusa* nel modo che abbiamo ora visto. Si potrà fare corrispondere anche una regione del piano? La figura qui accanto ci dice che le cose sono molto piú complicate che non nel caso del triangolo. Ma c'è un caso in cui l'analogia con il triangolo si può portare avanti bene: il caso in cui la retta che congiunge due qualsiasi vertici consecutivi della spezzata chiusa $A\,B\,C\,D$ lascia gli altri vertici in uno stesso semipiano. In questo caso si può considerare l'intersezione di questi quattro semipiani. Questa regione convessa si dirà anch'essa **quadrangolo** (o **quadrilatero**) **convesso** di vertici A, B, C, D. I segmenti $[A, C]$, $[B, D]$ (ottenuti congiungendo un vertice con il vertice non consecutivo) si dicono **diagonali** del quadrangolo.

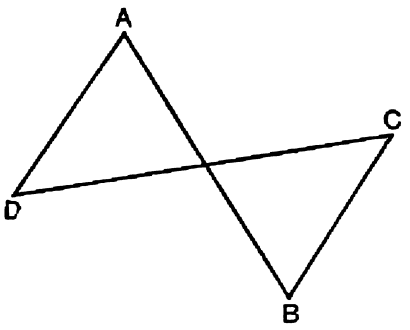


Fig. 21

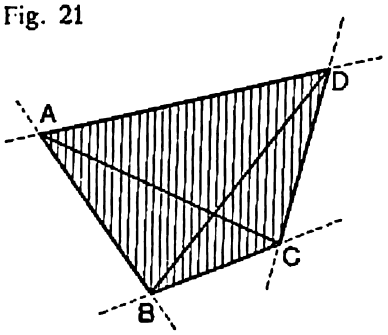


Fig. 22

Lo stesso discorso si può fare per n punti A_1, A_2, ..., A_n (vertici, assegnati sempre in ordine) *. Se la retta individuata da due vertici consecutivi lascia tutti gli altri vertici in uno stesso semipiano, si può fare l'intersezione di tutti questi semipiani. e si ottiene una regione convessa che viene detta **poligono convesso di n vertici** (ed n **lati**). Naturalmente, anche in questo caso la denominazione corrente non è univoca: il termine poligono si può riferire sia all'insieme degli n punti, sia alla spezzata di n lati, sia alla regione piana limitata dalla spezzata.

13.6 L'esposizione della geometria che abbiamo cominciato in questa lezione si può paragonare anch'essa ad un cammino: partiamo dagli assiomi

Alcuni teoremi sui triangoli

* Naturalmente, anche A_n ed A_1 si devono intendere consecutivi.

per arrivare, con una successione di deduzioni, ad una completa descrizione del piano: questa meta verrà raggiunta nel 15° capitolo. Nel nostro cammino, che cerchiamo di rendere piú breve e meno tortuoso che sia possibile, lasciamo da parte tante cose che pure sarebbero interessanti. In questo paragrafo ci proponiamo di esporre alcuni di questi argomenti complementari; si tratta di questioni importanti, che tuttavia *possono essere tralasciate senza perdere il filo del discorso principale.*

I) *Dato un triangolo, una retta che non passa per alcuno dei suoi vertici, o non taglia alcun lato o ne taglia esattamente due.*

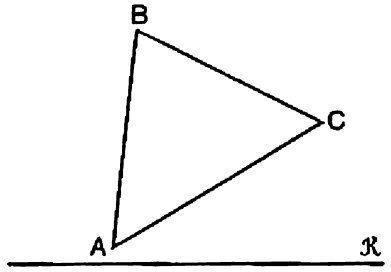


Fig. 23

Il contenuto intuitivo di questo teorema è ovvio: se una retta entra nella regione triangolare, essa deve anche uscirne. Vediamo la dimostrazione.

Siano A, B, C i vertici del triangolo, $\mathfrak{R}$ la retta: come possono ripartirsi questi tre vertici fra i due semipiani generati da $\mathfrak{R}$? Possono stare tutti e tre in un semipiano (e allora la retta non taglia alcun lato), oppure possono essere: due in un semipiano ed uno nell'altro (in questo caso due lati sono tagliati da $\mathfrak{R}$ ed uno no, evidentemente).

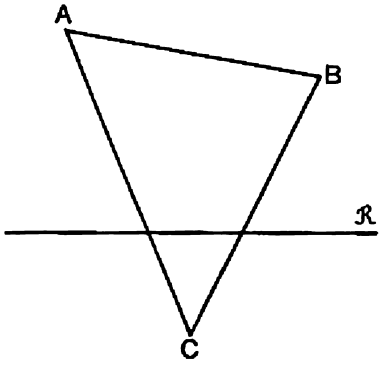


Fig. 24

II) *Una retta che unisce un punto interno ad un triangolo con un vertice, incontra il lato opposto.*

Sia $A\,B\,C$ un triangolo, e sia P un punto ad esso interno. Vogliamo dimostrare che la retta PA taglia il lato $[B, C]$. Sia H un punto del segmento $[B, C]$ diverso da B e da C. Uniamo H con P. Se la retta PH passa per A, essa coincide con la retta PA, quindi è vero che essa taglia il lato $[B, C]$; altrimenti la retta PH, che taglia il lato $[B, C]$, taglia uno degli altri due lati del triangolo ABC; supponiamo che essa tagli il lato $[A, B]$ in un punto K. Consideriamo ora il triangolo HKB: la retta AP taglia il lato $[H, K]$:

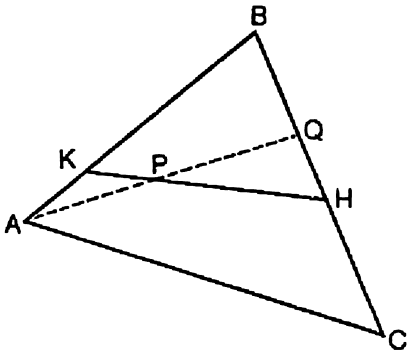


Fig. 25

zata è chiusa, si può evitare la ripetizione del primo vertice, e si può scrivere, ad esempio, $A\,B\,C\,D$).

Una quaterna di punti $A\,B\,C\,D$ (in ordine) si dirà **quadrangolo** (o **quadrilatero**).

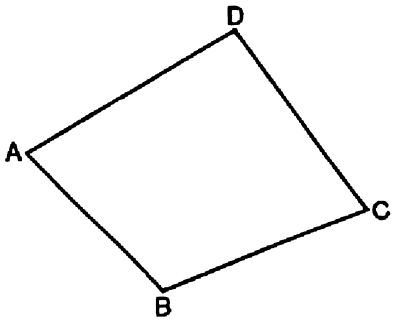


Fig. 20

A questa quaterna di punti si può anzitutto fare corrispondere una spezzata *chiusa* nel modo che abbiamo ora visto. Si potrà fare corrispondere anche una regione del piano? La figura qui accanto ci dice che le cose sono molto piú complicate che non nel caso del triangolo. Ma c'è un caso in cui l'analogia con il triangolo si può portare avanti bene: il caso in cui la retta che congiunge due qualsiasi vertici consecutivi della spezzata chiusa $A\,B\,C\,D$ lascia gli altri vertici in uno stesso semipiano. In questo caso si può considerare l'intersezione di questi quattro semipiani. Questa regione convessa si dirà anch'essa **quadrangolo** (o **quadrilatero**) **convesso** di vertici A, B, C, D. I segmenti $[A, C]$, $[B, D]$ (ottenuti congiungendo un vertice con il vertice non consecutivo) si dicono **diagonali** del quadrangolo.

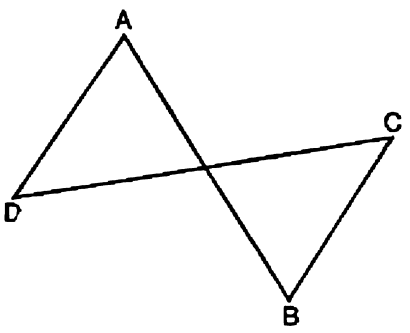


Fig. 21

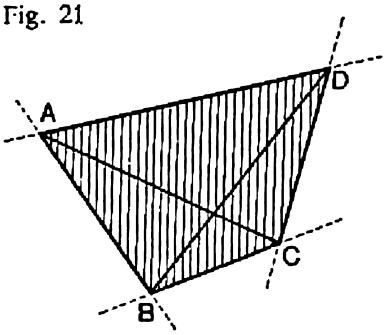


Fig. 22

Lo stesso discorso si può fare per n punti A_1, A_2, ..., A_n (vertici, assegnati sempre in ordine) *. Se la retta individuata da due vertici consecutivi lascia tutti gli altri vertici in uno stesso semipiano, si può fare l'intersezione di tutti questi semipiani, e si ottiene una regione convessa che viene detta **poligono convesso di n vertici** (ed n **lati**). Naturalmente, anche in questo caso la denominazione corrente non è univoca: il termine poligono si può riferire sia all'insieme degli n punti, sia alla spezzata di n lati, sia alla regione piana limitata dalla spezzata.

13.6 L'esposizione della geometria che abbiamo cominciato in questa lezione si può paragonare anch'essa ad un cammino: partiamo dagli assiomi

Alcuni teoremi sui triangoli

* Naturalmente, anche A_n ed A_1 si devono intendere consecutivi.

per arrivare, con una successione di deduzioni, ad una completa descrizione del piano: questa meta verrà raggiunta nel 15° capitolo. Nel nostro cammino, che cerchiamo di rendere piú breve e meno tortuoso che sia possibile, lasciamo da parte tante cose che pure sarebbero interessanti. In questo paragrafo ci proponiamo di esporre alcuni di questi argomenti complementari; si tratta di questioni importanti, che tuttavia *possono essere tralasciate senza perdere il filo del discorso principale.*

I) *Dato un triangolo, una retta che non passa per alcuno dei suoi vertici, o non taglia alcun lato o ne taglia esattamente due.*

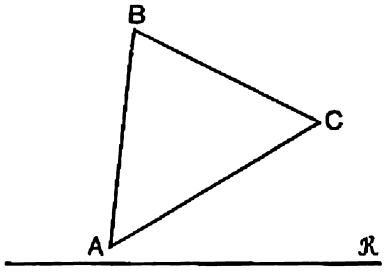


Fig. 23

Il contenuto intuitivo di questo teorema è ovvio: se una retta entra nella regione triangolare, essa deve anche uscirne. Vediamo la dimostrazione.

Siano A, B, C i vertici del triangolo, $\mathfrak{R}$ la retta: come possono ripartirsi questi tre vertici fra i due semipiani generati da $\mathfrak{R}$? Possono stare tutti e tre in un semipiano (e allora la retta non taglia alcun lato), oppure possono essere: due in un semipiano ed uno nell'altro (in questo caso due lati sono tagliati da $\mathfrak{R}$ ed uno no, evidentemente).

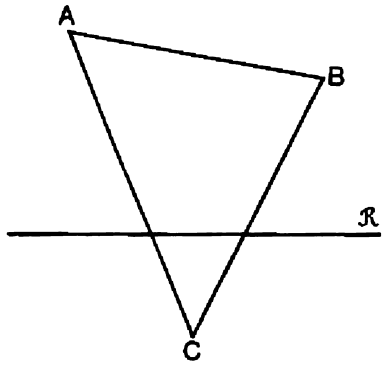


Fig. 24

II) *Una retta che unisce un punto interno ad un triangolo con un vertice, incontra il lato opposto.*

Sia $A\,B\,C$ un triangolo, e sia P un punto ad esso interno. Vogliamo dimostrare che la retta PA taglia il lato $[B, C]$. Sia H un punto del segmento $[B, C]$ diverso da B e da C. Uniamo H con P. Se la retta PH passa per A, essa coincide con la retta PA, quindi è vero che essa taglia il lato $[B, C]$; altrimenti la retta PH, che taglia il lato $[B, C]$, taglia uno degli altri due lati del triangolo ABC; supponiamo che essa tagli il lato $[A, B]$ in un punto K. Consideriamo ora il triangolo HKB: la retta AP taglia il lato $[H, K]$:

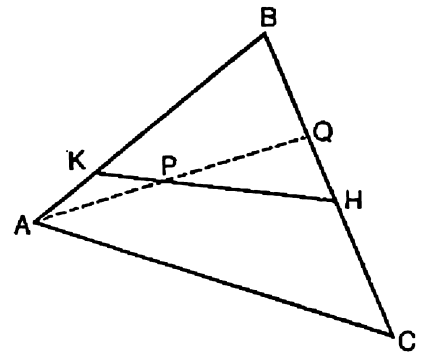


Fig. 25

essa non passa per alcuno dei vertici. Allora deve tagliare uno degli altri due lati, e questo è necessariamente il lato $[B, H]$. Sia Q il punto di incontro: la tesi è certamente verificata perché Q appartiene al lato $[B, C]$.

III) *Due triangoli, ABC e ABD, hanno in comune il lato AB; inoltre il vertice C del primo triangolo è interno al secondo. Allora il perimetro del primo è minore del perimetro del secondo.*

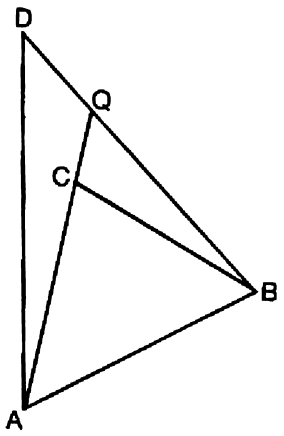


Fig. 26

Per il teorema precedente, il prolungamento del lato $[A, C]$ incontra il lato $[B, D]$ in un punto Q.

Si ha allora, per la disuguaglianza triangolare, $\overline{BC} < \overline{CQ} + \overline{QB}$; aggiungendo ad ambo i membri $\overline{AC}$, si ottiene

$$\overline{AC} + \overline{BC} < \overline{AC} + \overline{CQ} + \overline{QB} = \overline{AQ} + \overline{QB}$$

Nello stesso modo si dimostra che $\overline{AQ} + \overline{QB} < \overline{AD} + \overline{BD}$.

Combinando le due disuguaglianze, si ricava:

$$\overline{AC} + \overline{BC} < \overline{AD} + \overline{BD}$$

e, aggiungendo ad ambo i membri $\overline{AB}$, si ha $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{BD}$, che è la tesi.

Piú in generale si può dimostrare che se un triangolo ABC è contenuto in un triangolo $A'B'C'$, il perimetro di ABC è minore del perimetro di $A'B'C'$. Ancora piú in generale: se un poligono convesso K è contenuto in un poligono convesso K', il perimetro di K è minore del perimetro di K'.

Vocaboli e simboli

distanza $d(P, Q)$, $\overline{PQ}$
assioma (postulato)
teorema
spazio, punto: $A, B, P, \ldots$
cerchio, disco
retta: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \ldots$
punti **allineati**
rette **incidenti, parallele**
semiretta, segmento
semirette **opposte**
misura (lunghezza) di un segmento
coordinata di un punto; **origine**
semipiano, (semipiani) **opposti**
bordo (frontiera) di un semipiano
(insieme) **convesso**
angolo, regione angolare
triangolo, quadrangolo (quadrilatero), poligono
spezzata (poligonale)
» **chiusa**

Esercizi

1 In un cerchio ogni corda che non sia un diametro ha lunghezza inferiore al diametro.

2 Dato un cerchio ed un punto P ad esso esterno (cioè avente dal centro distanza superiore al raggio), trovare il punto del cerchio piú vicino a P.

3 In un quadrangolo un lato ha lunghezza minore della somma delle lunghezze degli altri.

4 Prendere nel piano una retta, poi una seconda retta incidente a questa, poi una terza retta incidente ad entrambe le precedenti e non passante per il loro punto d'incontro; procedere cosí, sempre aggiungendo una nuova retta incidente a tutte le precedenti e non passante per alcuno dei loro punti d'incontro. Determinare il numero delle regioni in cui resta suddiviso il piano quando le rette sono in numero di: 1, 2, 3, 4, 5. Sono regioni convesse? Fare vedere che queste regioni si possono colorare usando solo due colori diversi in modo tale che due regioni con un lato in comune siano colorate con colori diversi.

* **5** Riprendere l'esercizio precedente supponendo che il numero delle rette sia n qualunque. Quale regola generale si può formulare per calcolare il numero delle regioni?

* **6** Dato un angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ di vertice O e presa una semiretta $\mathcal{T}$ interna all'angolo, le due semirette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ stanno da parti opposte rispetto a $\mathcal{T}$. (Prendere due punti: B su $\mathcal{R}$ e C su $\mathcal{S}$, rispettivamente, e utilizzare il teorema II del § 13.6).

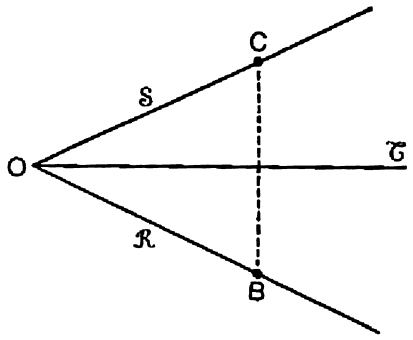


Fig. 27

* **7** La distanza di un punto interno di un triangolo da ciascuno dei vertici è inferiore al semiperimetro. (Congiungere il punto interno P con un vertice e applicare il teorema II del § 13.6).

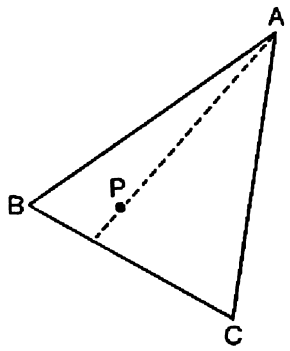


Fig. 28

* **8** Le diagonali di un quadrangolo *convesso* si tagliano fra loro. (Applicare il risultato dell'esercizio 6): detto $A\,B\,C\,D$ il quadrangolo, i vertici B e D sono da parti opposte rispetto alla retta AC, analogamente i vertici A e C sono da parti opposte rispetto alla retta BD).

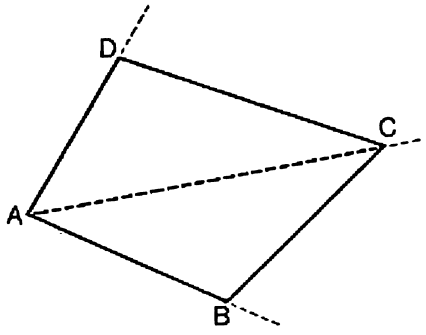


Fig. 29

9 In ogni quadrangolo convesso la somma delle lunghezze di due lati opposti è inferiore alla somma delle lunghezze delle diagonali.

(Tenere conto che le diagonali si tagliano, come si è dimostrato con l'esercizio precedente).

10 Sia $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ un angolo e sia $\mathcal{T}$ una semiretta con origine nel vertice dell'angolo e appartenente all'angolo.
Indichiamo con $\mathcal{T}', \mathcal{R}', \mathcal{S}'$ le semirette opposte a $\mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{S}$ rispettivamente. Allora $\mathcal{T}'$ appartiene all'angolo $(\mathcal{R}', \mathcal{S}')$.

** **11** Date tre rette incidenti a due a due e non passanti per un medesimo punto, ritrovare le 7 regioni in cui esse suddividono il piano come intersezione dei semipiani che esse generano. Come mai queste regioni sono in numero di 7, anziché di $2^3 = 8$?

** **12** Date quattro rette, a due a due incidenti e tali che di esse tre non passino mai per uno stesso punto, dimostrare che fra le regioni (convesse) in cui esse suddividono il piano c'è uno ed un solo quadrangolo.

14

Le simmetrie

14.1 Prendiamo due fogli di carta e sovrapponiamoli perfettamente; se la carta è traslucida, possiamo ricopiare sul foglio superiore una figura che sia stata disegnata sul foglio inferiore.

Le isometrie

A questo punto, muoviamo il foglio superiore, in modo che rimanga sul tavolo, ma senza piú combaciare con il foglio inferiore. La figura ricopiata non combacia piú con l'originale; tuttavia diciamo che è « perfettamente uguale all'originale ».

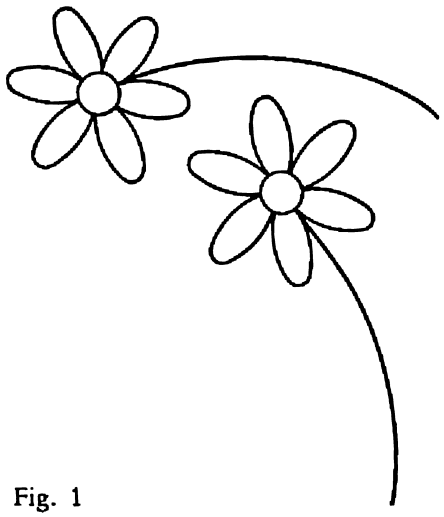


Fig. 1

Cerchiamo di « matematizzare » questa situazione: un punto P del foglio fisso è stato portato (con lo spostamento del foglio superiore) in un punto P'. Sostituendo il nostro foglio con un piano, siamo portati a pensare che il nostro movimento si possa rappresentare con un'applicazione bigettiva $P \to P'$ del piano in sé. Ma c'è qualcosa di piú: dobbiamo chiederci perché mai la nostra figura si sia conservata uguale all'originale, malgrado lo spostamento. Riflettendo un poco ci accorgiamo che il motivo fondamentale è questo: per la rigidezza del foglio, le reciproche distanze fra i punti non cambiano nello spostamento.

Indicando con f la nostra applicazione, e ponendo $f(P) = P'$, $f(Q) = Q'$, si ha

$$\overline{P'Q'} = \overline{PQ} \qquad (1)$$

Siamo cosí condotti a porre la seguente definizione:

Si dice **isometria** (o anche **congruenza**) *un'applicazione bigettiva del piano in sé che conserva le distanze, cioè tale che per ogni coppia di punti* (P, Q) *valga la relazione* (1).

Naturalmente, il concetto di isometria è piú generale: per ogni spazio S in cui è definita una distanza potremo considerare le applicazioni bigettive che conservano la distanza: queste verranno dette sempre isometrie.

L'importanza delle isometrie è evidente: molti dei corpi che ci circondano possono essere considerati corpi rigidi (cioè corpi che, pure spostandosi, mantengono inalterate le distanze reciproche fra le loro parti; questo comportamento è dovuto, in molti casi, alla presenza di una struttura cristallina). La geometria, che è la parte piú elementare della fisica, descrive le posizioni che i corpi rigidi possono assumere nello spazio, servendosi della nozione di isometria. (Per ora noi ci occupiamo solo di geometria del piano e quindi possiamo solo descrivere i moti dei corpi rigidi nel piano).

Prima di proseguire, dobbiamo fare un'osservazione di carattere generale.

Supponiamo di considerare un'insieme S ed un'applicazione bigettiva f di S in sé; indichiamo con g l'applicazione inversa di f. Dati due sottoinsiemi K, K' di S, come possiamo essere certi che f mandi esattamente K su K'? Anzitutto, deve valere ovviamente la condizione:

f porta i punti di K in punti di K'.

Ma non è detto cosí che l'immagine di K esau-

risca K'; aggiungiamo allora una seconda condizione:

g porta i punti di K' in punti di K.

Allora si vede subito che l'immagine di K è tutto K' perché ogni punto P di K' proviene da un punto di K: precisamente da $g(P)$. Infatti, per ipotesi, $g(P)$ è in K, ed essendo g l'inversa di f si ha $f[g(P)] = P$.

Detto questo, possiamo enunciare alcune semplici proprietà delle isometrie del piano.

I) *Un'isometria trasforma un cerchio in un cerchio, un disco in un disco.*

Sia f un'isometria e sia g l'applicazione inversa di f: è evidente [dalla (1)], che anche g è un'isometria.

Sia K un cerchio di centro O e raggio r; sia O' il trasformato di O e sia K' il cerchio con centro O' e raggio r.

Sia P un punto qualsiasi di K e sia P' il suo trasformato. Essendo $\overline{OP} = r$, si ha $\overline{O'P'} = r$, quindi il punto P' sta nel cerchio K'.

D'altra parte, l'isometria inversa g porta i punti di K' in punti di K.

Per l'osservazione generale che abbiamo fatto prima, l'immagine di K è tutto K'.

Analogamente si ragiona per il disco

$\{P: \overline{OP} \leq r\}$*

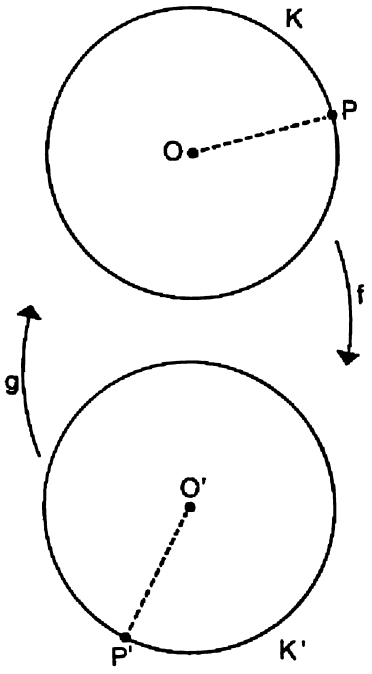


Fig. 2

* Questa scrittura (che è coerente con quella che abbiamo adottato fin dall'inizio per rappresentare gli insiemi) indica l'insieme di tutti i punti P che hanno distanza $\leq r$ da O.

II) *Un'isometria trasforma una retta in una retta.*

Consideriamo tre punti allineati A, B, C: supponiamo che B stia fra A e C. Allora si ha per l'assioma A4:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Poniamo $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$.
Allora, per la proprietà di isometria, si ha

$$\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$$

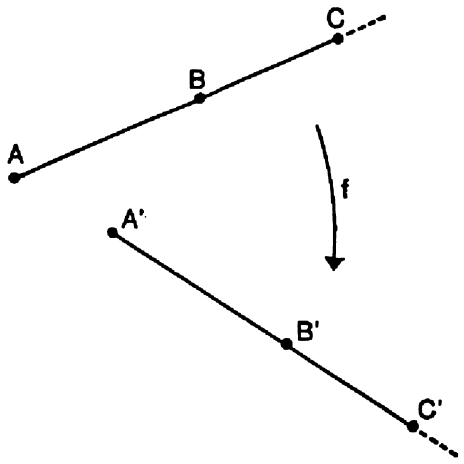


Fig. 3

ma, sempre per l'assioma A4, questa relazione ci dice che i punti A', B', C' sono allineati e che B' sta fra A' e C'.

Sia ora $\mathcal{R}$ una retta e siano A, B punti distinti di $\mathcal{R}$; indichiamo con $\mathcal{R}'$ la retta individuata dai punti corrispondenti A', B'. Per quello che abbiamo ora visto, l'isometria porta un punto P allineato con A e B, cioè un punto P della retta $\mathcal{R}$, in un punto allineato con A', B', cioè in un punto della retta $\mathcal{R}'$. Poiché l'isometria inversa, per la stessa ragione, porta i punti di $\mathcal{R}'$ in punti di $\mathcal{R}$, è chiaro che l'immagine di $\mathcal{R}$ è tutta $\mathcal{R}'$.

In questo paragrafo abbiamo semplicemente descritto le proprietà delle isometrie; non siamo ancora in grado di affermare che esistono delle isometrie diverse dalla identità (è ovvio che l'identità, che lascia fermo ogni punto, è un'isometria). Nel prossimo paragrafo stabiliremo (per mezzo di un nuovo assioma) l'esistenza di certe interessanti isometrie.

Esercizi

1 Un'isometria che lascia fissi due punti A, B lascia fissi tutti i punti della retta $A\,B$.

* **2** Un'isometria che lascia fissi tre punti A, B, C non allineati è l'identità.

3 Un'isometria che scambia fra loro due punti A , B ha anche un punto fisso (almeno).

* **4** È unica l'isometria che manda tre punti A, B, C non allineati in tre punti assegnati. (Dette f_1 , f_2 due isometrie possibili, g_1 e g_2 le rispettive inverse, si consideri $g_2 \circ f_1$: dove manda questa i tre punti A, B, C? Si tenga presente l'esercizio 2).

La simmetria assiale. Rette ortogonali. Il problema di Erone

14.2 Prendiamo ancora un foglio di carta traslucida e ripieghiamolo su se stesso; si intuisce che la linea di piegatura è rettilinea. Ora che i due mezzi fogli combaciano, possiamo ricopiare nel mezzo del foglio superiore una figura che sia stata disegnata sul mezzo foglio inferiore. A questo punto, stendiamo nuovamente il foglio: vediamo che la figura ricopiata è simmetrica di quella originaria rispetto alla linea di piegatura; volendo «matematizzare» questa esperienza, possiamo chiamare $\mathcal{R}$ la linea di piegatura, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ i due semipiani da essa individuati. È chiaro che, col nostro procedimento, abbiamo individuato un'applicazione isometrica di $\mathcal{A}_1$ in $\mathcal{A}_2$; alla stessa maniera possiamo definire un'applicazione di $\mathcal{A}_2$ in $\mathcal{A}_1$; quanto ai punti di $\mathcal{R}$, è evidente che non si muovono. L'intuizione ci dice che in questo modo definiamo un'isometria di tutto il piano che lascia fermi i punti di $\mathcal{R}$ e scambia fra loro i due semipiani individuati da $\mathcal{R}$.

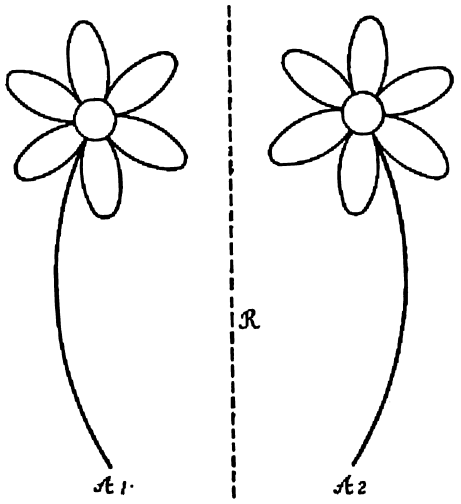


Fig. 4

Vi è un'altra operazione concreta che conduce al medesimo risultato: il ribaltamento, che consiste nel ruotare un piano di mezzo giro attorno ad una sua retta $\mathcal{R}$.

Queste esperienze ci conducono a porre la seguente definizione:

Data nel piano una retta $\mathcal{R}$, si dice **simmetria assiale (o ribaltamento) di asse** $\mathcal{R}$ *un'isometria che ha queste proprietà:*

1) *Lascia fissi tutti i punti di $\mathcal{R}$ e porta ciascuno dei due semipiani generati da $\mathcal{R}$ nell'altro.*

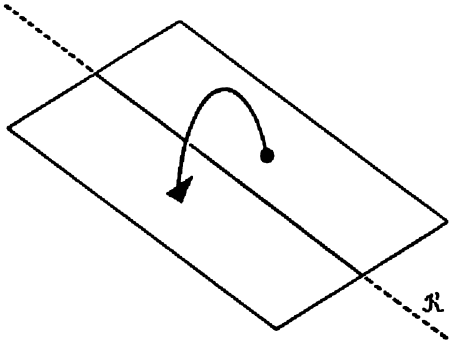


Fig. 5

2) *È involutoria* (cioè: applicata due volte ci dà l'identità, cfr. § 12.3).

Vediamo subito alcune importanti proprietà delle simmetrie assiali. Indichiamo con $s_{\mathcal{R}}$ la simmetria di asse $\mathcal{R}$; A sia un punto che non appartiene ad $\mathcal{R}$ e sia $A \to A'$; allora, per il carattere involutorio della simmetria, si ha $A' \to A$. Consideriamo la retta $\mathcal{S}$ che passa per A e per A'; dalla simmetria (che è un'isometria) essa viene portata in una retta che passa per A' (corrispondente di A) e per A (corrispondente di A'). Ma, poiché c'è un'unica retta che passa per due punti, *la retta* $\mathcal{S}'$ *trasformata di* $\mathcal{S}$ *coincide con* $\mathcal{S}$.

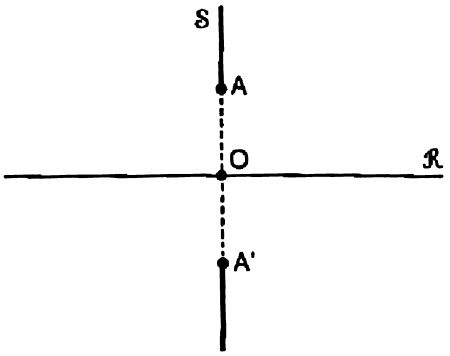


Fig. 6

Il fatto che $\mathcal{S}$ viene trasformata in sé dalla simmetria non significa per nulla che i singoli punti di $\mathcal{S}$ rimangano fissi; anzi c'è solamente un punto che rimane fisso: il punto di incontro O della retta $\mathcal{S}$ con la retta $\mathcal{R}$. (Questo punto di incontro esiste senza dubbio perché i punti A, A' stanno in semipiani opposti, perciò il segmento $[A, A']$ taglia $\mathcal{R}$). La retta $\mathcal{S}$ si spezza in due semirette con origine O: ciascuna di esse viene mutata nell'altra dalla simmetria.

Possiamo porre la seguente definizione:

Una retta $\mathcal{S}$ *si dice* **perpendicolare** (*o anche* **ortogonale**) *ad* $\mathcal{R}$ *se è diversa da* $\mathcal{R}$ *e se viene trasformata in sé dalla simmetria di asse* $\mathcal{R}$.

(Occorre veramente precisare che $\mathcal{S}$ deve essere diversa da $\mathcal{R}$: perché anche $\mathcal{R}$ è trasformata in sé dalla simmetria di asse $\mathcal{R}$...).

Fin qui abbiamo definito e descritto le simmetrie assiali; ma descrivere un oggetto non significa affermare che esista (ci vuole altro!...). Perciò dobbiamo ragionevolmente inserire un assioma:

A7 (Assioma) *Data una qualunque retta* $\mathcal{R}$ *del piano, esiste una ed una sola simmetria assiale di asse* $\mathcal{R}$.

Ci poniamo ora un problema semplice, ma di grande importanza: data una retta $\mathcal{R}$ ed un punto P, trovare un punto di $\mathcal{R}$ che sia a distanza minima da P. Se il punto P è su $\mathcal{R}$ la soluzione è banale; perciò supporremo che P sia fuori di $\mathcal{R}$. Consideriamo un punto qualsiasi M di $\mathcal{R}$. Il metodo che seguiamo è quello di «sdoppiamento della figura» mediante una simmetria con asse $\mathcal{R}$. Il punto P ha come corrispondente un punto P' nel semipiano opposto; il punto M corrisponde a se stesso.

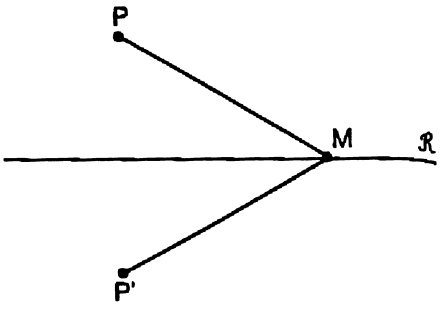


Fig. 7

Per la proprietà di isometria si ha $\overline{PM} = \overline{P'M}$. Dunque $\overline{PM} = \frac{1}{2}(\overline{PM} + \overline{P'M})$. Si tratta di prendere M in modo che questa espressione assuma il valore minimo possibile.

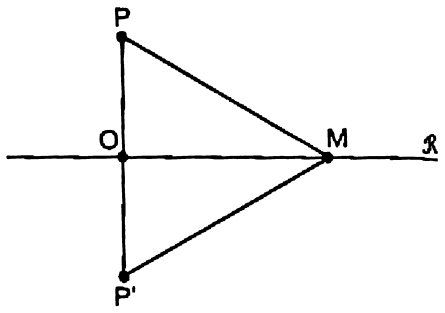


Fig. 8

Evidentemente, questo si ottiene congiungendo P con P' mediante un segmento e considerando il punto O in cui questo segmento taglia la retta $\mathcal{R}$ (non dimentichiamo che P e P' si trovano in semipiani opposti rispetto ad $\mathcal{R}$). Se M è un punto qualsiasi di $\mathcal{R}$ diverso da O si ha, per la disuguaglianza triangolare

$$\overline{PP'} < \overline{PM} + \overline{P'M}$$

Perciò, moltiplicando per $\frac{1}{2}$ ambo i membri e notando che $\overline{PO} = \frac{1}{2}\overline{PP'}$, si ha:

$$\overline{PO} < \frac{1}{2}(\overline{PM} + \overline{P'M}) = \overline{PM}$$

Riflettiamo su quanto abbiamo dimostrato: c'è un unico punto di $\mathcal{R}$ a distanza minima da P ed è quello in cui la perpendicolare mandata per P taglia la retta $\mathcal{R}$.

Il punto O si dice **proiezione ortogonale** di P.

Ora dimostriamo un'affermazione intuitivamente

chiara, che però non abbiamo ancora enunciato esplicitamente:

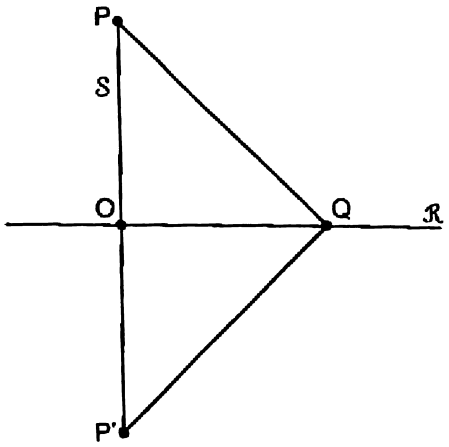


Fig. 9

I) *Se la retta* S *è ortogonale alla retta* $\mathcal{R}$, *la retta* $\mathcal{R}$ *è ortogonale alla retta* S.

Indichiamo con O il punto d'incontro delle due rette. Basterà far vedere che, preso un punto Q di $\mathcal{R}$ diverso da O, il punto O è, fra tutti i punti di S, quello piú vicino a Q: infatti, come abbiamo visto, questo basta ad assicurarci che O è la proiezione di Q su S e, perciò, $\mathcal{R}$ è ortogonale ad S.

Dimostriamo che un qualsiasi punto P di S diverso da O non può essere il punto di minima distanza da Q. Infatti, prendiamo un qualsiasi punto P di S, diverso da O; il punto P' simmetrico di P, appartiene ad S, essendo S ortogonale ad $\mathcal{R}$.

Essendo la simmetria di asse $\mathcal{R}$ una isometria, si ha:

$$\overline{PQ} = \overline{P'Q}$$

cioè: i punti P, P' di S hanno la stessa distanza da Q; ma allora *il punto P non può essere il punto di minima distanza da Q perché, come abbiamo osservato, il punto di minima distanza è unico.* Dunque il punto di minima distanza non può essere che O. Cosí la nostra dimostrazione è conclusa.

Il teorema dimostrato ci dice che la relazione di ortogonalità è simmetrica: d'ora in poi potremo usare senza possibilità di equivoco l'espressione: *le rette* $\mathcal{R}$ *ed* S *sono fra loro ortogonali.*

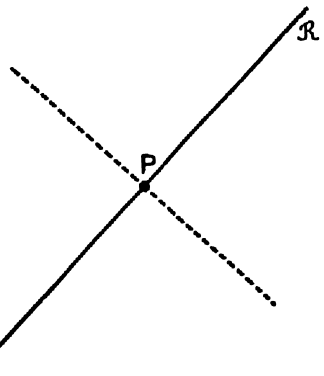


Fig. 10

L'assioma A7 ci ha permesso di mandare una perpendicolare ad una retta $\mathcal{R}$ da un punto P esterno. Non siamo in grado di mandare una perpendicolare ad $\mathcal{R}$ da un punto P di $\mathcal{R}$. Intuitivamente, questa costruzione si realizza bene

mediante una piegatura del foglio: tracciata sul foglio una retta $\mathcal{R}$ e preso su questa un punto P, possiamo piegare il foglio in modo che le due semirette con origine in P vengano a combaciare fra loro. La linea di piegatura del foglio rappresenta l'asse di una simmetria che trasforma in sé la retta $\mathcal{R}$.

Traduciamo questa esperienza nel seguente assioma:

A8 (Assioma) *Data una retta $\mathcal{R}$ ed un punto P di essa, esiste un'unica retta $\mathcal{S}$ perpendicolare ad $\mathcal{R}$ e passante per P.*

Aggiungiamo un'osservazione che ci sarà utile in seguito:

Una qualunque isometria trasforma due rette $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ fra loro ortogonali in rette $\mathcal{R}'$, $\mathcal{S}'$ fra loro ortogonali.

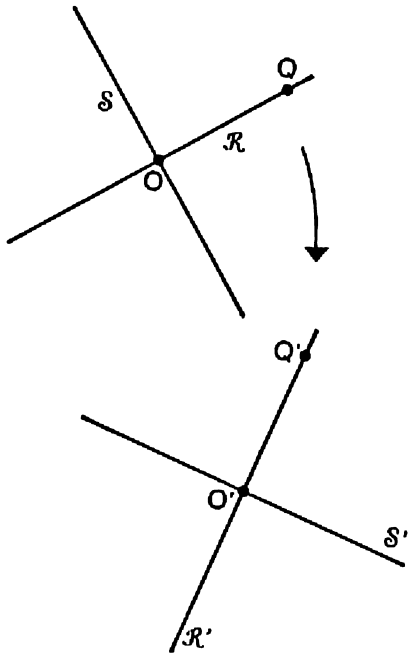


Fig. 11

Sappiamo già che la nostra isometria trasforma rette in rette; sia O il punto di incontro di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$, e sia O' il corrispondente di O, che sarà punto di incontro di $\mathcal{R}'$ ed $\mathcal{S}'$. Prendiamo un punto Q di $\mathcal{R}$ diverso da O; sia Q' il suo corrispondente in $\mathcal{R}'$. Di tutti i punti di $\mathcal{S}$, O è quello di minima distanza da Q. Ma, poiché l'isometria — per definizione — conserva le distanze, di tutti i punti di $\mathcal{S}'$, O' è quello di minima distanza da Q'. Questo dice che $\mathcal{R}'$ è ortogonale a $\mathcal{S}'$.

L'angolo formato da due semirette con la stessa origine e fra loro ortogonali si dice **retto.** Dunque, un'isometria conserva gli angoli retti.

Concludiamo questo § risolvendo il classico problema di Erone *: dati due punti P, Q che si

* Matematico e ingegnere vissuto fra il I e il II secolo a. C. È noto anche per avere trovato la formula che esprime l'area di un triangolo in funzione delle lunghezze dei lati.

trovano da una stessa parte rispetto alla retta $\mathcal{R}$, trovare il percorso piú breve che congiunge P con Q toccando la retta $\mathcal{R}$. (Possiamo rendere concreto il problema in questo modo: $\mathcal{R}$ è un fiume che attraversa la pianura; un cacciatore si trova in P e deve ritornare a casa, in Q, ma prima deve attingere l'acqua al fiume).

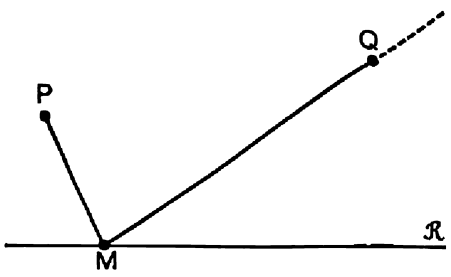


Fig. 12

La nostra intuizione ci dice che il cammino dovrà essere rettilineo fino ad un certo punto M di $\mathcal{R}$, e poi di nuovo rettilineo da M a Q: il problema è dunque di *determinare M su* $\mathcal{R}$ *in modo tale che* $\overline{PM} + \overline{MQ}$ *sia minima.*

Il metodo che seguiamo è ancora una volta quello della simmetria assiale con asse $\mathcal{R}$. Conviene però, nel nostro caso, trasformare solo una parte della figura: il segmento $[P, M]$. Sia P' il simmetrico di P.

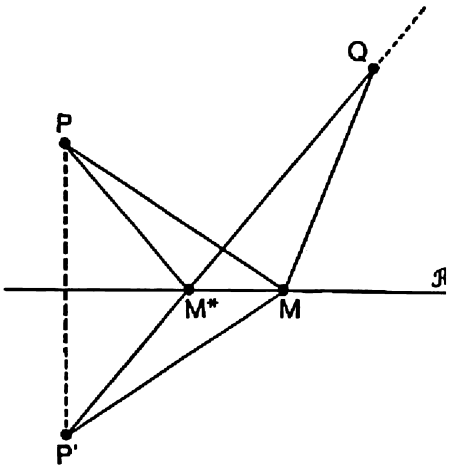


Fig. 13

Essendo

$$\overline{PM} = \overline{P'M}$$

si ha

$$\overline{PM} + \overline{MQ} = \overline{P'M} + \overline{MQ}$$

Occorre fare in modo che questo valore sia minimo. È allora chiaro che il minimo viene raggiunto quando il percorso da P' a Q è rettilineo. Poiché ora P' e Q stanno da parti opposte rispetto ad $\mathcal{R}$, il segmento $[P', Q]$ taglia la retta $\mathcal{R}$ in un punto M^* che è il punto cercato.

Ritorneremo piú avanti su questo problema per riesaminare la soluzione ora trovata.

Esercizi

1 Dato l'asse di simmetria $\mathcal{R}$ e date due coppie di punti corrispondenti A, A'; B, B' costruire servendosi solo della riga (non graduata) il corrispondente di un punto qualsiasi P.

(In questo esercizio le uniche operazioni ammesse sono quelle di tracciare rette per due punti ed intersecare rette fra loro).

2 Dati due cerchi distinti di uguale raggio, dimostrare che esiste una ed una sola simmetria assiale che trasforma l'uno nell'altro.

* **3** Date due rette parallele $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e due punti P, Q non appartenenti ad esse, trovare il cammino piú breve che va da P a Q toccando prima la retta $\mathcal{R}$ e poi la retta $\mathcal{S}$. (Distinguere e classificare con cura tutti i casi che si possono presentare).

** **4** Dati due punti P, Q nell'angolo *retto* $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$, trovare il cammino piú breve che va da P a Q toccando prima $\mathcal{R}$ e poi $\mathcal{S}$. (Eseguire una simmetria di asse $\mathcal{R}$ che porterà il punto P in un punto P' ed una simmetria di asse $\mathcal{S}$ che porterà il punto Q in un punto Q' ...).

L'asse di un segmento. Ortogonalità e parallelismo

14.3 Ci proponiamo ora di confrontare fra loro le distanze che un punto del piano ha da due punti fissati.

I) *Sia $\mathcal{R}$ una retta e siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ i due semipiani che essa genera. Sia P un punto di $\mathcal{A}$, P' il suo simmetrico rispetto ad $\mathcal{R}$. Allora, per tutti i punti Q del semipiano $\mathcal{A}$ si ha:*

$$\overline{PQ} < \overline{P'Q} \qquad (1)$$

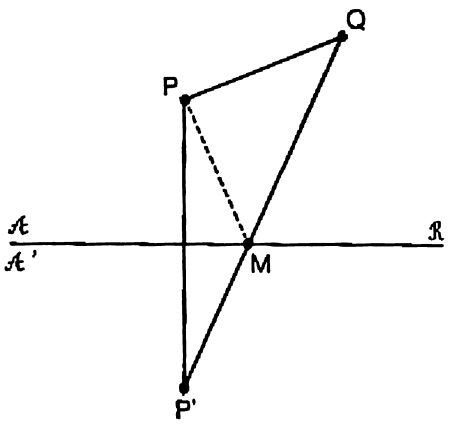


Fig. 14

Cominciamo osservando che Q e P' stanno in semipiani opposti, dal momento che Q sta nello stesso semipiano di P. Allora il segmento $[P', Q]$ taglia la retta $\mathcal{R}$ in un punto che chiameremo M. Per la disuguaglianza triangolare applicata al triangolo PQM si ha:

$$\overline{PQ} < \overline{PM} + \overline{MQ}$$

Osserviamo infatti che non può valere il segno di uguaglianza, dal momento che il punto M appartiene alla retta $\mathcal{R}$, e perciò non può stare sul segmento $[P, Q]$. Poiché la simmetria assiale conserva le distanze, si ha $\overline{PM} = \overline{P'M}$; sostituendo

$\overline{PM}$ con $\overline{P'M}$ nella disuguaglianza precedente, si ricava:

$$\overline{PQ} < \overline{P'M} + \overline{MQ}$$

ma si ha $\overline{P'M} + \overline{MQ} = \overline{P'Q}$. Si ottiene cosí la disuguaglianza (1) che volevamo dimostrare.

Da quanto abbiamo dimostrato si conclude (mantenendo le notazioni ora impiegate) che:

i punti del semipiano $\mathcal{A}$ sono piú vicini a P che a P';

i punti del semipiano $\mathcal{A}'$ sono piú vicini a P' che a P;

i punti di $\mathcal{R}$ hanno la stessa distanza da P e da P'.

Dati due punti distinti P, P' chiamiamo **asse del segmento** $[P, P']$ l'asse dell'unica simmetria che scambia P con P', cioè la retta perpendicolare al segmento $[P, P']$ nel suo punto di mezzo (l'assioma A8 ci dice che questa simmetria esiste ed è unica...).

Allora, dal teorema dimostrato si deduce che l'asse del segmento $[P, P']$ è l'insieme formato da tutti e soli i punti che hanno uguale distanza da P e da P'. (Con termine classico si dice *il* **luogo** *dei punti che hanno uguale distanza da P e da P'*).

Siamo ora in grado di risolvere un problema importante: *trovare una simmetria assiale che scambia fra loro i due lati di un angolo.*

Siano $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ due semirette distinte e non allineate, con origine comune O. Prendiamo su $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ due punti: P, P' rispettivamente, distinti da O e tali che $\overline{OP} = \overline{OP'}$. Sia ora $\mathcal{C}$ l'asse del

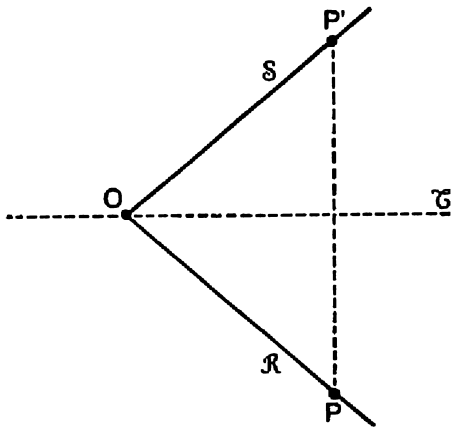


Fig. 15

segmento $[P, P']$: il punto O deve stare su $\mathfrak{t}$ perché $\mathfrak{t}$ è il luogo dei punti che hanno uguale distanza da P e da P'. La simmetria con asse $\mathfrak{t}$ scambia fra loro i punti P e P' e lascia fermo il punto O; è allora evidente che essa scambia fra loro le semirette $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{S}$.

Indichiamo con $\mathfrak{t}^*$ la semiretta di $\mathfrak{t}$ con origine in O contenuta nell'angolo $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$. L'angolo $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ risulta allora suddiviso in due angoli fra loro isometrici (trasformati l'uno nell'altro dalla simmetria di asse $\mathfrak{t}$): $(\mathfrak{R}, \mathfrak{t}^*)$ e $(\mathfrak{t}^*, \mathfrak{S})$. Il termine **bisettrice** si impiega abitualmente per indicare sia la retta $\mathfrak{t}$ che la semiretta $\mathfrak{t}^*$.

Se $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{S}$ sono le due semirette opposte di una medesima retta $\mathfrak{z}$, allora è evidente che la perpendicolare mandata per l'origine O suddivide ciascuno dei due semipiani generati dalla retta $\mathfrak{z}$ in due angoli retti fra loro simmetrici.

Vediamo ora un teorema interessante che collega la perpendicolarità con il parallelismo.

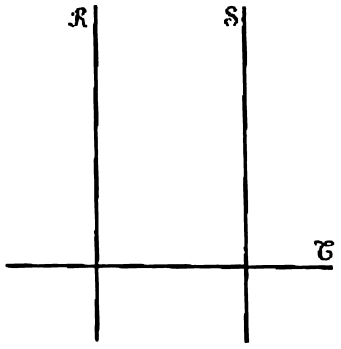


Fig. 16

II) *Due rette $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ ortogonali ad una stessa retta $\mathfrak{t}$ sono fra loro parallele.*

Supponiamo che $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{S}$ abbiano un punto P in comune. Se il punto P appartiene alla retta $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{S}$ devono coincidere perché, per l'assioma A8, da un punto di una retta si può mandare *una sola* perpendicolare ad essa.

Se le rette $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ hanno in comune un punto P che non sta in $\mathfrak{t}$, allora esse devono avere in comune anche il punto P', simmetrico di P rispetto alla retta $\mathfrak{t}$. (Ricordiamo che la simmetria di asse $\mathfrak{t}$ trasforma $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$: quindi il punto P' deve appartenere ad $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$). Ma allora, anche in questo caso le rette $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{S}$ devono coincidere, avendo due punti in comune (assioma A2).

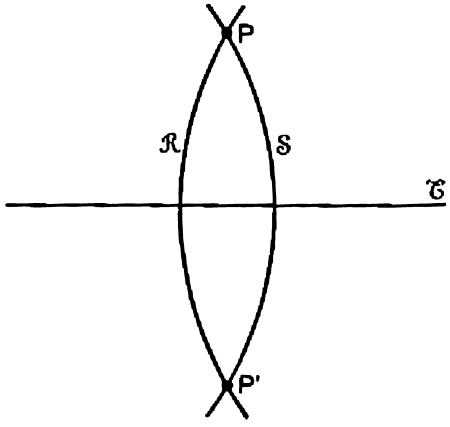


Fig. 17

Concludiamo: le rette $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{S}$ o coincidono o

non hanno alcun punto in comune: e ciò, per definizione, vuol dire che sono parallele.

Con questo teorema siamo in grado di dimostrare che

III) *Data una retta $\mathcal{R}$ ed un punto P, esiste una parallela ad $\mathcal{R}$ passante per P.*

Infatti: mandiamo da P la perpendicolare $\mathcal{T}$ ad $\mathcal{R}$; quindi mandiamo da P la perpendicolare $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$:

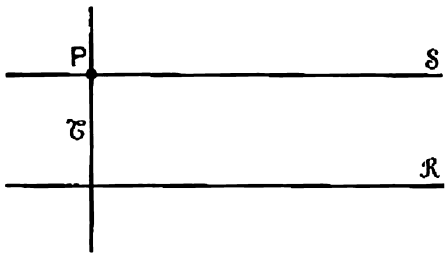


Fig. 18

$\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono fra loro parallele, per il teorema ora dimostrato, essendo entrambe perpendicolari a $\mathcal{T}$.

Questo teorema *non dice affatto che la parallela mandata dal punto P alla retta $\mathcal{R}$ sia unica* (come la nostra intuizione esige): ed effettivamente la cosa non è dimostrabile partendo dai soli assiomi A1 , . . . , A8 . Ma questa è una grossa questione su cui ritorneremo nel prossimo capitolo.

Esercizi

1 Siano A , B punti distinti della retta $\mathcal{R}$ e siano P e Q punti da parti opposte di $\mathcal{R}$, tali che $\overline{PA} = \overline{QA}$, $\overline{PB} = \overline{QB}$. Allora i punti P e Q sono fra loro simmetrici rispetto ad $\mathcal{R}$. (Consideriamo infatti l'asse del segmento $[P , Q]$: esso contiene A perché A è equidistante da P e da Q, contiene B perché . . .).

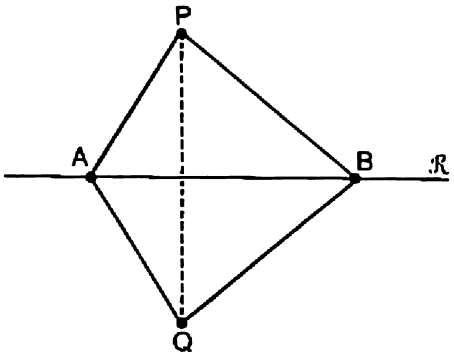


Fig. 19

* **2** Sia P un punto esterno ad una retta $\mathcal{R}$ e sia 0 la proiezione di P su $\mathcal{R}$. Siano A e B punti di $\mathcal{R}$ tali che A stia fra 0 e B. Dimostrare che si ha $\overline{PO} < \overline{PA} <$

$< \overline{PB}$. (Mandare la perpendicolare ad $\mathcal{R}$ in A: essa taglia il segmento $[P, B]$ in un punto Q (perché?); si ha $\overline{QA} < \overline{QB}$, essendo A la proiezione di Q. Dalla disuguaglianza triangolare si ricava $\overline{PA} < \overline{PQ} + \overline{QA}$, ecc.).

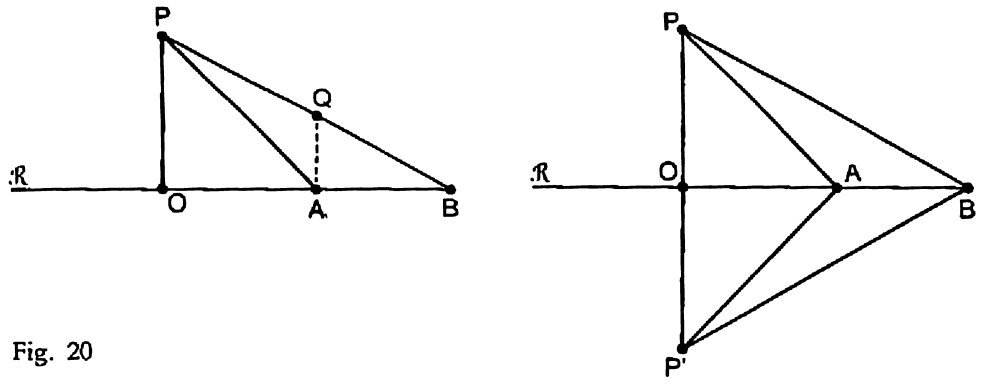


Fig. 20

Il problema può anche essere risolto eseguendo una simmetria con asse $\mathcal{R}$ e applicando il teorema III del § 13.6 ai due triangoli $PP'A$, $PP'B$.

3 Dato un segmento $[A, B]$ e dato un punto P, trovare il punto Q del segmento $[A, B]$ piú vicino a P. (Distinguere i vari casi che possono presentarsi).

** **4** Dato un angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$, dire quali punti di esso sono piú vicini ad $\mathcal{R}$ che ad $\mathcal{S}$ e quali punti hanno uguale distanza.

5 Dato un triangolo $A\,B\,C$, dimostrare che vi è un unico punto interno P che ha uguale distanza dalle rette AB, BC, AC; verificare poi che P si proietta ortogonalmente su ciascuno dei tre lati $[A, B]$, $[B, C]$, $[A, C]$. (P è il centro del cerchio inscritto nel triangolo).

6 Dati due punti A, B, quale è il luogo dei centri dei cerchi che passano per A e per B?

* **7** Dato un segmento e dati due punti P, Q fuori di esso, trovare il percorso piú breve che congiunge P con Q toccando il segmento. (Occorre, fra l'altro, fare uso del teorema III del § 13.6).

14.4 Fissiamo nel piano un punto O; preso un punto P diverso da O, tracciamo la retta PO, quindi sulla semiretta di origine O non contenente P consideriamo un punto P' tale che

La simmetria centrale

$$\overline{OP'} = \overline{OP}$$

Abbiamo cosí un'applicazione $P \to P'$ che viene completata facendo corrispondere ad O il punto O stesso:

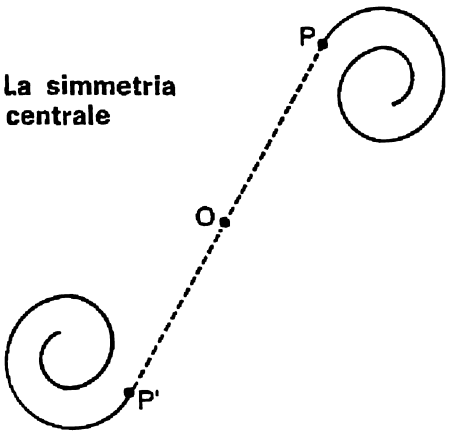


Fig. 21

$O \to O$

Questa applicazione è evidentemente *involutoria* (cioè, ricordiamo, rimanda il punto P' immagine di P, al punto di partenza P); è dunque bigettiva. Si vede subito che essa ha un solo punto fisso: il centro O. Inoltre le rette che passano per O vengono trasformate in sé.

Essa viene detta **simmetria centrale di centro (o polo)** O.

Dimostreremo che essa è un'isometria; lo faremo vedere attraverso il seguente teorema, molto interessante.

I) *Una simmetria centrale di centro O si può ottenere come composizione di due simmetrie assiali i cui assi sono due qualsiasi rette fra loro ortogonali che si incontrano in O.*

La dimostrazione di questo teorema è un po' complessa, ma si può suddividere in fasi ben distinte.

Consideriamo dunque due qualsiasi rette: $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, che si incontrano in O e sono fra loro ortogonali. Sia P un punto del piano che non stia né su $\mathfrak{X}$ né su $\mathfrak{Y}$.

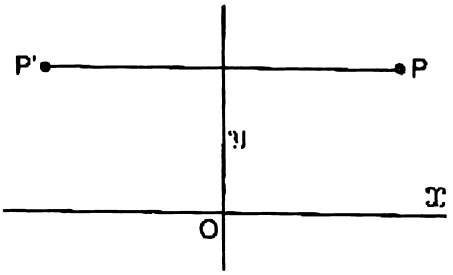


Fig. 22

a) Consideriamo il punto P' simmetrico di P rispetto alla retta $\mathfrak{Y}$. Il segmento $[P, P']$ taglia la retta $\mathfrak{Y}$ ortogonalmente.

b) Facciamo ora una simmetria rispetto alla retta $\mathfrak{X}$; il punto P va in Q; il punto P' va in Q'; la retta $\mathfrak{Y}$, che è ortogonale alla retta $\mathfrak{X}$, viene trasformata in sé.

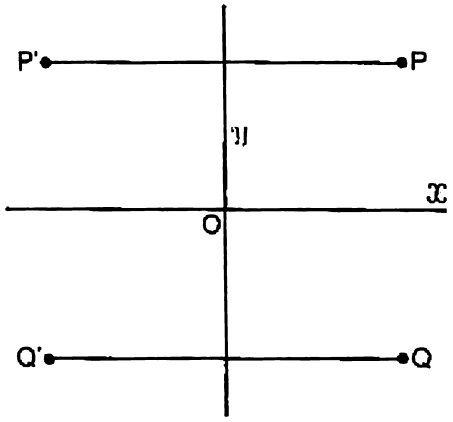


Fig. 23

Poiché ogni isometria trasforma rette ortogonali in rette ortogonali il segmento $[Q, Q']$ risulta ortogonale alla retta $\mathfrak{Y}$; inoltre, poiché la retta $\mathfrak{Y}$ taglia il segmento $[P, P']$ nel punto di mezzo, essa taglia anche il segmento $[Q, Q']$ nel suo

punto di mezzo. Quindi, intanto, abbiamo dimostrato che i punti Q e Q′ sono fra loro simmetrici rispetto ad 𝔶.

c) Consideriamo ora il segmento $[P, Q']$, che taglia certamente l'asse 𝔶, dal momento che P e Q' si trovano in semipiani opposti rispetto all'asse 𝔶. (Ricordiamo che P e P', essendo fra loro simmetrici rispetto ad 𝔶, si trovano in semipiani opposti, mentre il segmento $[P', Q']$ non può tagliare l'asse 𝔶 perché la retta $P'Q'$ è ortogonale ad 𝔵 ed è perciò parallela ad 𝔶).

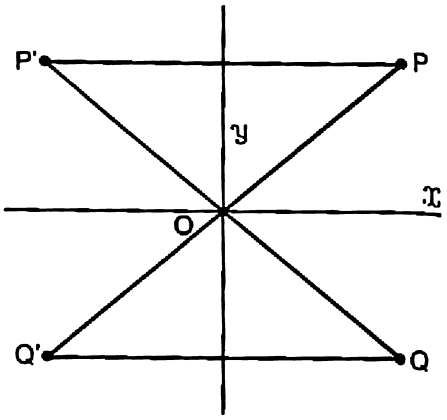


Fig. 24

Il segmento $[P, Q']$ viene trasformato dalla simmetria con asse 𝔶 nel segmento $[P', Q]$; il punto d'incontro del segmento $[P, Q']$ con la retta 𝔶 è un punto che resta fisso nella simmetria e appartiene anche al segmento $[P', Q]$. Dunque, questi due segmenti si tagliano in un punto di 𝔶.

d) Il segmento $[P, Q']$ viene trasformato dalla simmetria con asse 𝔵 nel segmento $[P', Q]$. Il segmento $[P, Q']$ taglia l'asse 𝔵 (perché i punti P, Q' sono in semipiani opposti rispetto ad 𝔵) e il punto di intersezione appartiene anche al segmento $[P', Q]$. Dunque i due segmenti $[P, Q']$ e $[P', Q]$ si tagliano in un punto dell'asse 𝔵.

e) Tiriamo le conclusioni: il punto di intersezione dei segmenti $[P, Q']$, $[P', Q]$ dovendo appartenere sia alla retta 𝔵 che alla retta 𝔶 non può essere che O. Essendo P' corrispondente di P nella simmetria di asse 𝔶 si ha $\overline{OP} = \overline{OP'}$; d'altra parte, P' va in Q' mediante la simmetria di asse 𝔵, quindi è $\overline{OP'} = \overline{OQ'}$.

Dunque Q' è ottenuto da P mediante la composizione di una simmetria di asse 𝔵 con una simmetria di asse 𝔶 ed è il corrispondente di P nella simmetria centrale di centro O. Questo è appunto quello che volevamo dimostrare. Se il punto P sta su 𝔶 o su 𝔵, allora la verifica della nostra tesi è immediata.

Dal fatto che una simmetria centrale si ottiene come composizione di due simmetrie assiali (che sono isometrie, cioè conservano le distanze) si deduce subito che *una simmetria centrale è un'isometria.*

Vediamo ora alcune semplici conseguenze di quanto abbiamo trovato.

II) *Una simmetria centrale trasforma una retta in una retta ad essa parallela.*

Infatti: non può succedere che una retta $\mathcal{R}$ e la sua trasformata $\mathcal{R}'$ siano incidenti, cioè abbiano un solo punto in comune, perché, se il punto P che esse hanno in comune è il centro di simmetria O, allora le rette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ coincidono (abbiamo notato che le rette passanti per il centro vengono trasformate in sé), se il punto P non è il centro di simmetria, allora anche il punto P' (che è diverso da P) deve appartenere sia ad $\mathcal{R}$ che ad $\mathcal{R}'$ e quindi le rette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ non hanno un solo punto in comune.

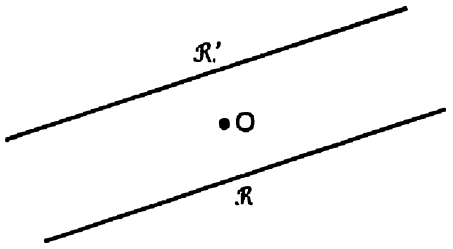


Fig. 25

Dato un angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ l'angolo formato dalle semirette opposte $(\mathcal{R}', \mathcal{S}')$ si dice **angolo opposto al vertice.** Ebbene, risulta chiaro che due angoli opposti al vertice si corrispondono in un'isometria, che è appunto la simmetria centrale con centro nel vertice.

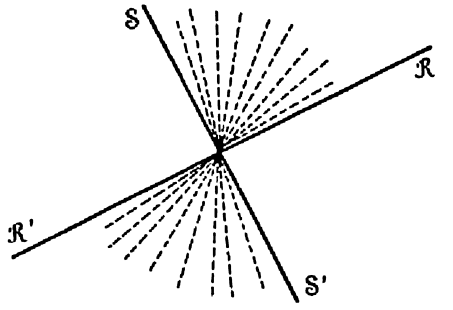


Fig. 26

Ritorniamo ora al problema di Erone (con le notazioni del § 14.2).

La simmetria centrale che manda la semiretta M^*Q nella semiretta M^*P' si può scrivere $s_{\mathfrak{X}} \circ s_{\mathfrak{y}}$ (cioè come composizione della simmetria di asse $\mathfrak{y}$ ortogonale ad $\mathfrak{X}$ con la simmetria di asse $\mathfrak{X}$). Eseguiamo successivamente la simmetria $s_{\mathfrak{X}}$ che porta la semiretta M^*P' nella semiretta M^*P. Dunque, a conti fatti, l'isometria

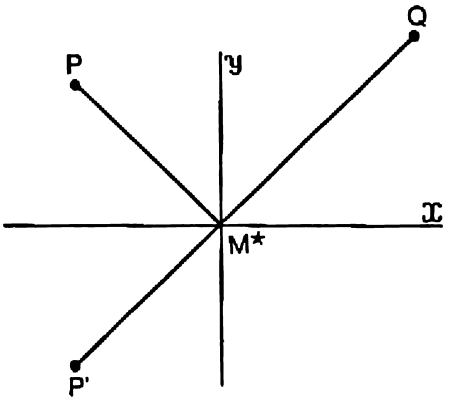


Fig. 27

$s_{\mathfrak{X}} \circ s_{\mathfrak{X}} \circ s_{\mathfrak{y}}$

porta la semiretta M^*Q nella semiretta M^*P, ma poiché $s_{\mathfrak{X}} \circ s_{\mathfrak{X}} =$ identità (dal momento che le simmetrie assiali sono applicazioni involutorie), si conclude che $s_{\mathfrak{Y}}$ porta la semiretta M^*Q nella semiretta M^*P. Cosí abbiamo messo in evidenza un'interessante proprietà della soluzione del problema di Erone. In particolare: gli angoli che M^*Q e M^*P fanno con la semiretta di $\mathfrak{Y}$ che sta nel loro semipiano sono simmetrici fra loro.

Ciò mette in evidenza un interessante legame tra il problema del minimo cammino e la legge riguardante la riflessione di un raggio luminoso: sappiamo dall'esperienza che l'angolo di incidenza risulta uguale all'angolo di riflessione. In altre parole, *il raggio luminoso che va da P a Q dopo essere stato riflesso da un piano (di cui la retta $\mathfrak{Y}$ rappresenta la sezione) si comporta secondo la legge del minimo cammino.* La legge del minimo cammino (che si può estendere ad altre situazioni, come la rifrazione) può essere presa come fondamento della cosí detta « ottica geometrica ».

Esercizi

1 Esaminare le lettere maiuscole del normale carattere stampatello.

Quali hanno un asse di simmetria?
Quali hanno un centro di simmetria?
Quali hanno due assi di simmetria fra loro ortogonali?

2 Date due rette incidenti, dimostrare che le bisettrici delle due coppie di angoli opposti al vertice da esse determinate sono fra loro ortogonali. [Sia $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ uno degli angoli e sia $(\mathcal{R}', \mathcal{S}')$ il suo opposto al vertice: si tratta di dimostrare che la simmetria assiale che scambia fra loro $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}'$ ed $\mathcal{S}'$, trasforma in sé la bisettrice degli angoli $(\mathcal{R}, \mathcal{S}')$ e $(\mathcal{R}', \mathcal{S})$].

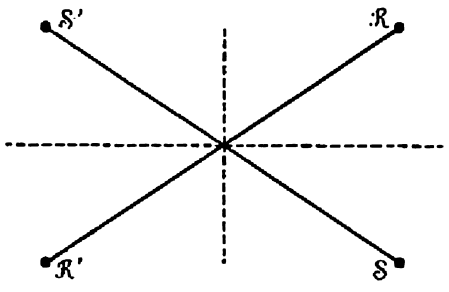


Fig. 28

3 Ridimostrare il teorema II mandando per O la perpendicolare ad $\mathcal{R}$: dimostrare che essa risulta perpendicolare ad $\mathcal{R}'$. Applicare poi il teorema II del § 14.3.

4 Siano $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ due rette incidenti. Siano A e B punti di $\mathcal{R}$ e di $\mathcal{S}$ rispettivamente, ad uguale distanza dal punto comune delle rette. Dimostrare che la simmetria di asse AB trasforma la retta $\mathcal{R}$ in una retta parallela ad $\mathcal{S}$.

Triangoli e quadrilateri con simmetrie. Estensione del concetto di simmetria

14.5 Ora passiamo in rassegna alcune semplici figure che hanno un asse di simmetria (cioè: che sono trasformate in sé da una simmetria assiale) oppure un centro di simmetria (cioè: che sono trasformate in sé da una simmetria centrale). Considereremo i triangoli e i quadrangoli.

a) Vediamo come deve essere un triangolo $A\,B\,C$ per essere trasformato in sé da una simmetria assiale di asse $\mathcal{R}$.

La simmetria genera una *sostituzione* nell'insieme dei vertici $\{A, B, C\}$.

Non è possibile che ogni vertice corrisponda a se stesso, perché allora tutti i vertici dovrebbero stare su $\mathcal{R}$, mentre i tre vertici non sono allineati.

Supponiamo che sia $A \to B$; allora deve essere $B \to A$, e il punto C, che resta solo, deve corrispondere a se stesso, e quindi deve trovarsi su $\mathcal{R}$. Lo schema della sostituzione è dunque il seguente:

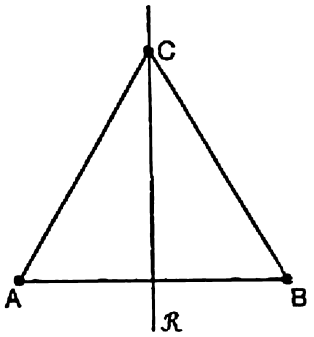


Fig. 29

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$$

Un triangolo con un asse di simmetria si dice **isoscele.**

Un triangolo non può invece avere un centro di simmetria. Infatti, ragionando formalmente come nel caso precedente e arrivando al medesimo schema, si trova che il punto C, essendo un punto

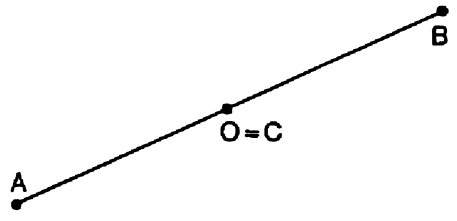


Fig. 30

fisso, deve coincidere con il centro di simmetria O (infatti abbiamo visto che in una simmetria centrale l'unico punto fisso è il centro). Ma allora i punti A, B, C sarebbero allineati.

b) Consideriamo ora un quadrangolo $A\,B\,C\,D$, escludendo dalla nostra ricerca i quadrangoli che hanno tre (o quattro) vertici allineati (quadrangoli **degeneri**); domandiamoci dapprima se un quadrangolo può avere un asse di simmetria. Escludendo il caso in cui tutti e quattro i punti rimangono fermi (in questo caso dovrebbero tutti trovarsi sull'asse $\mathcal{R}$, e il quadrangolo sarebbe degenere...), vi sarà una coppia di punti che si scambiano fra loro: $A \to B$, $B \to A$.

Allora, due casi sono possibili: che i punti dell'altra coppia si scambino fra loro, oppure che siano entrambi fissi.

Gli schemi possibili sono i seguenti:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix}$$

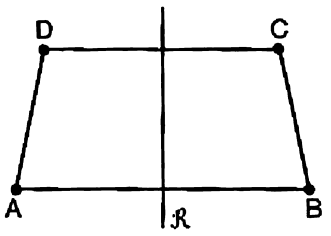


Fig. 31

Nel primo caso il quadrangolo è un **trapezio isoscele.** Nel secondo caso, il quadrangolo è costituito da due triangoli fra loro simmetrici, aventi un lato in comune su $\mathcal{R}$. Nel caso in cui il segmento AB taglia l'asse $\mathcal{R}$ in un punto del segmento $[C\,,D]$ questa figura è un quadrangolo convesso.

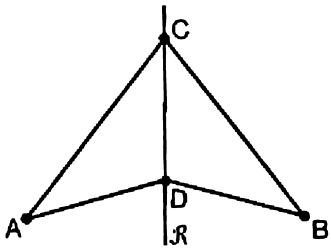


Fig. 32

c) Cerchiamo ora come può essere un quadrangolo che venga trasformato in sé da una simmetria centrale, di centro O. Sempre per il fatto che in una simmetria centrale l'unico punto fisso è il centro, si vede facilmente che (volendo trascurare anche in questo caso i quadrangoli degeneri) il solo schema possibile è

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

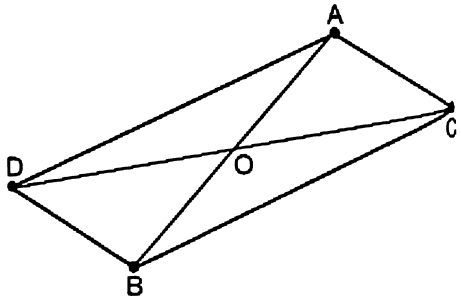


Fig. 33

Otteniamo un quadrangolo convesso con queste proprietà:

i lati opposti sono paralleli (infatti, una simmetria centrale trasforma una retta in una retta parallela);

le diagonali si tagliano a metà ($\overline{OA} = \overline{OB}$ perché A e B si corrispondono nella simmetria di centro O);

gli angoli opposti ($\hat{A}$ *e* $\hat{B}$, $\hat{C}$ *e* $\hat{D}$) *sono isometrici* (cioè si corrispondono in un'isometria, che è appunto la simmetria centrale).

Un quadrangolo che ha un centro di simmetria (e che pertanto gode delle proprietà qui enunciate) si dice **parallelogrammo**.

d) Infine vogliamo vedere come può essere un quadrangolo $A\,B\,C\,D$ che viene trasformato in sé sia da una simmetria di asse $\mathfrak{x}$ che da una simmetria di asse $\mathfrak{y}$, dove $\mathfrak{x}$ ed $\mathfrak{y}$ sono ortogonali fra loro.

Sia O il punto di incontro degli assi; indichiamo con $s_{\mathfrak{x}}$ la simmetria di asse $\mathfrak{x}$, con $s_{\mathfrak{y}}$ la simmetria di asse $\mathfrak{y}$.

La discussione può essere fatta in astratto (tenendo conto che $s_{\mathfrak{x}}$, $s_{\mathfrak{y}}$ sono involutorie e che si ha $s_{\mathfrak{x}} \circ s_{\mathfrak{y}} = s_{\mathfrak{y}} \circ s_{\mathfrak{x}}$), ma è piú semplice cercare di leggere direttamente la soluzione dalla figura.

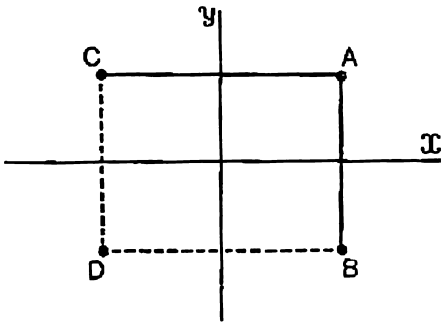


Fig. 34

Un primo caso è quello in cui vi sia un vertice A che non appartiene ad alcuno degli assi; sia $s_{\mathfrak{x}} : A \to B$ e $s_{\mathfrak{y}} : A \to C$. Notiamo che C sta dalla stessa parte di A rispetto ad $\mathfrak{x}$ (perché il segmento $[C, A]$ è parallelo ad $\mathfrak{x}$) e da parte opposta rispetto ad $\mathfrak{y}$, invece B sta dalla stessa parte di A rispetto ad $\mathfrak{y}$ e da parte opposta rispetto ad $\mathfrak{x}$; dunque è $C \neq B$. Deve allora essere $s_{\mathfrak{y}} : B \to D$, $s_{\mathfrak{x}} : C \to D$. Notiamo che

se, come abbiamo supposto, un vertice non appartiene ad alcuno degli assi, tutti i quattro vertici sono fuori degli assi.

Lo schema è questo:

$$s_x : \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} \; ; \; s_y : \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}$$

Il quadrangolo è un **rettangolo.**

Il secondo caso (l'unico che resta da considerare) è quello in cui tutti i vertici (A, B, C, D) sono sugli assi; nessuno può essere coincidente con O, e non possono essere tutti su uno stesso asse, perché allora il quadrangolo sarebbe degenere.

La situazione (a parte il diverso nome che si può dare ai punti) è quella della figura. Lo schema è:

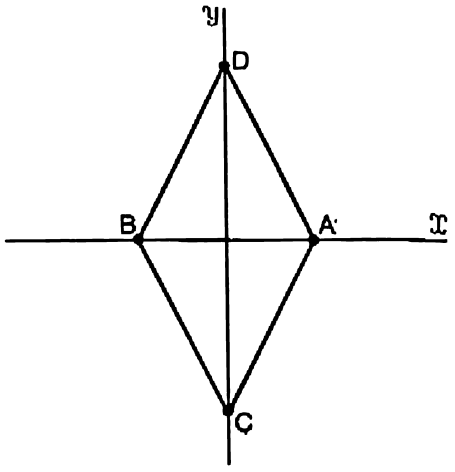


Fig. 35

$$s_x : \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \end{pmatrix} \; ; \; s_y : \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix}$$

Il quadrangolo è un **rombo.**

La nozione di simmetria può essere intesa in un senso piú generale e piú astratto di quello ora considerato: invece di chiederci se una figura rimane invariata quando si fa una trasformazione di un certo tipo (come: simmetria assiale, simmetria centrale), possiamo chiederci se, ad esempio, un'espressione rimane inalterata quando si faccia una trasformazione di un certo tipo nelle variabili.

1) Consideriamo l'espressione (polinomio) nelle variabili x, y, z:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2+(x+y+z)^2$$

Essa rimane inalterata quando si fa la seguente sostituzione nelle variabili $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$ o, piú in generale, quando si fa una qualsiasi sostituzione fra le variabili x, y, z. Ci si rende conto facilmente che questa simmetria deve ritrovarsi anche nella forma canonica. (Eseguire i calcoli per verificarlo).

2) I numeri di Pascal hanno un tipo di simmetria che è stato già notato (§ 6.1). Si ha $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$; dunque, il numero di Pascal $\binom{n}{m}$ rimane inalterato quando si fa la trasformazione $m \to n - m$ (verificare che questa è involutoria). La disposizione che abbiamo dato al triangolo di Pascal (6° lezione, fig. 3) mette in luce questa simmetria.

3) Ed ora, passiamo ad un problema di probabilità: in 5 lanci consecutivi di una moneta (simmetrica) quale è la probabilità di avere piú volte «Testa» che «Croce»?

Anche questo problema ha la sua simmetria. Possiamo considerare la trasformazione che scambia «Testa» con «Croce»: $T \to C$, $C \to T$. In questa trasformazione non mutano le probabilità, perché sono entrambe $\frac{1}{2}$. Nei calcoli piú complessi che si possono fare, e che utilizzano solo la probabilità di T e la probabilità di C, si può scambiare T con C senza che il valore dell'espressione cambi. Indichiamo con $\mathfrak{E}$ l'evento di cui parla il nostro problema (maggior numero di T che di C in 5 lanci), con $\mathfrak{E}'$ l'evento simmetrico (maggior numero di C che di T in 5 lanci). Si hanno queste rappresentazioni:

$\mathfrak{E}$:

T	5	4	3
C	0	1	2

$\mathfrak{E}'$:

C	5	4	3
T	0	1	2

Si vede che $\mathcal{E}'$ è l'evento complementare di $\mathcal{E}$ (essendo il numero dei lanci dispari non può accadere che T e C escano un numero uguale di volte). Poiché, per simmetria, la probabilità di $\mathcal{E}'$ è uguale alla probabilità di $\mathcal{E}$, entrambe le probabilità sono uguali ad $\frac{1}{2}$.

Questo discorso sulla simmetria dovrà essere ripreso in futuro, ma possiamo già renderci conto fin da ora che, nell'affrontare un problema, è conveniente ricercare con cura le simmetrie che esso presenta. In questo modo è spesso possibile trovare una soluzione intelligente e rapida anche là dove l'approccio diretto si presenta complicato e pesante.

Vocaboli e simboli

simmetria assiale (o **ribaltamento**)
asse di simmetria
(retta) **perpendicolare** (o **ortogonale**)
proiezione ortogonale
punto di minima distanza
(angolo) **retto**
luogo (dei punti che...)
asse (di un segmento)
bisettrice
simmetria centrale
centro (**polo**)
(angoli) **opposti al vertice**
(quadrangolo) **degenere**
triangolo isoscele
trapezio isoscele
parallelogrammo
rettangolo
rombo
(retta) **tangente** (ad un cerchio)
» **secante** »

Esercizi

1 Si consideri su un cerchio con centro in O un punto P.
Dimostrare che: *a*) la retta per P ortogonale al raggio $[O, P]$ ha in comune col cerchio il solo punto P. (Questa retta si dice, come è noto, «tangente» al cerchio). *b*) ogni altra retta per P ha punti interni al cerchio e taglia il cerchio in un secondo punto Q. (Una retta di questo tipo si dice «secante»).
[Per rispondere al quesito *b*) si cerchi un asse di simmetria della figura].

2 Dati due punti A, B e fissato uno dei due semipiani generati dalla retta $A\,B$, in esso vi è al piú un punto che ha distanze assegnate da A e da B.

3 Dimostrare che due cerchi, di centri O_1 ed O_2, possono avere:
a) nessun punto in comune; *b*) un solo punto P in comune; *c*) due punti P, Q in comune. Dimostrare che nel caso *b*) il punto P è allineato con O_1 ed O_2, nel caso *c*) la retta PQ è ortogonale alla retta $O_1\,O_2$.
(Fare un'intelligente simmetria).

4 Si lanciano tre dadi. Quale è la probabilità di avere un punteggio complessivo > 10?
(La soluzione diretta è facile, ma comporta calcoli molto noiosi; invece, si può trovare nel problema una simmetria che, conservando la probabilità, trasforma l'evento indicato nell'evento complementare...).

5 Ritornare sul problema del lancio dei tre dadi: calcolare le probabilità dei vari punteggi che si possono ottenere e fare un grafico del tipo di quello già visto per il caso di due dadi (fig. 8 del § 4.2). Si troverà che questo grafico presenta la caratteristica forma «a campana» e mostra un'evidente simmetria. (Anziché fare il calcolo daccapo, converrà utilizzare quanto abbiamo trovato nel § 4.2 per il caso di due dadi).

6 Considerare il polinomio nelle variabili x, y, z:

$$(x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(x+z-y)^2+(y+z-x)^2$$

Verificare che esso viene trasformato in sé da un qualsiasi scambio fra le variabili ed anche dalla sostituzione $x \to -x$, $y \to y$, $z \to z$.
Mettere poi in forma canonica il polinomio e verificare nuovamente le proprietà di simmetria suddette.

15

Da Euclide a Cartesio

15.1 Data una retta $\mathfrak{X}$, risulta definita, come abbiamo visto nel § 14.2, un'applicazione (la *proiezione* su $\mathfrak{X}$) che fa corrispondere a ciascun punto del piano il punto di $\mathfrak{X}$ piú vicino. Essa è surgettiva ma non iniettiva: basta riflettere che un punto P' di $\mathfrak{X}$ proviene da ogni punto P che si trova sulla perpendicolare mandata ad $\mathfrak{X}$ da P'.

L'assioma del rapporto di proiezione e il teorema di Pitagora

Vediamo ora che cosa succede quando si proietta su $\mathfrak{X}$ una qualsiasi retta $\mathfrak{R}$ incidente ad $\mathfrak{X}$ e **obliqua** (cioè non ortogonale) ad $\mathfrak{X}$. Sia O il punto comune alle due rette.

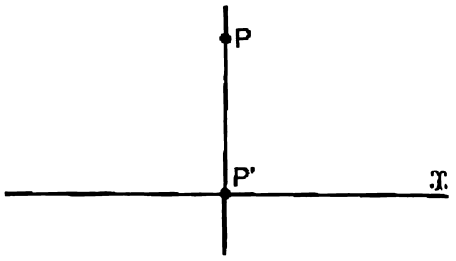


Fig. 1

La nostra intuizione ci dice che se due punti P, Q di $\mathfrak{R}$ si proiettano nei punti P', Q' (rispettivamente) deve essere $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$; in altre parole, $\overline{OP'}$ deve risultare *direttamente proporzionale* ad $\overline{OP}$. Questo fatto, tuttavia, non può essere dimostrato sulla base degli assiomi che abbiamo introdotto fino ad ora: è opportuno introdurre un altro assioma, che sarà l'ultimo della serie.

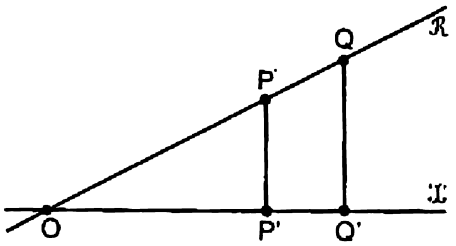


Fig. 2

A9 (Assioma) *Se* $\mathfrak{X}$ *ed* $\mathfrak{R}$ *sono rette che si incontrano in* O, *indicando con* P' *la proiezione di un punto* P *di* $\mathfrak{R}$ *su* $\mathfrak{X}$, *si ha*:

$$\overline{OP'} = k\,\overline{OP} \qquad (1)$$

dove k *è una costante* (che viene detta **rapporto di proiezione**).

La chiave di questo enunciato è proprio l'affermazione che k è costante, cioè non dipende dal punto che si proietta: $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}} = \ldots = k$.

Naturalmente, se facciamo variare la retta $\mathfrak{R}$ tenendo fisso il punto di incidenza O, varierà anche il numero k. Nell'enunciato dell'assioma non abbiamo imposto che $\mathfrak{R}$ sia obliqua perché anche il caso in cui $\mathfrak{R}$ sia ortogonale ad $\mathfrak{X}$ rientra nella nostra formulazione: infatti, in questo caso, tutti i punti si proiettano nel punto O e la (1) vale con $k = 0$. Del resto, nella nostra formulazione rientra anche il caso in cui $\mathfrak{R}$ coincida con $\mathfrak{X}$: allora la (1) vale con $k = 1$; in tutti gli altri casi, essendo $\overline{OP'} < \overline{OP}$, si ha $k < 1$.

La retta $\mathfrak{R}$ viene spezzata dal punto O in due semirette $\mathfrak{R}'$ ed $\mathfrak{R}''$; se $\mathfrak{R}$ è obliqua, la proiezione fa corrispondere biunivocamente ciascuna di queste semirette con una delle semirette in cui $\mathfrak{X}$ viene spezzata dal punto O : $\mathfrak{X}'$ ed $\mathfrak{X}''$.

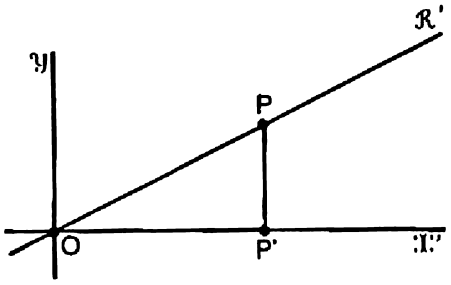


Fig. 3

Con quale criterio associamo queste semirette?

Mandiamo per il punto O la perpendicolare ad $\mathfrak{X}$, che indichiamo con $\mathfrak{y}$: la retta PP' è parallela ad $\mathfrak{y}$ e perciò i punti P e P' stanno dalla stessa parte rispetto ad $\mathfrak{y}$; dunque, le due semirette che si corrispondono nella proiezione sono quelle che stanno nello stesso semipiano rispetto ad $\mathfrak{y}$. Indichiamo con $\mathfrak{R}'$ la semiretta che corrisponde ad $\mathfrak{X}'$; l'angolo $(\mathfrak{X}', \mathfrak{R}')$ è contenuto in un angolo retto (quello che $\mathfrak{X}'$ fa con una delle semirette in cui si spezza $\mathfrak{y}$): diciamo che l'angolo $(\mathfrak{X}', \mathfrak{R}')$ è **acuto.**

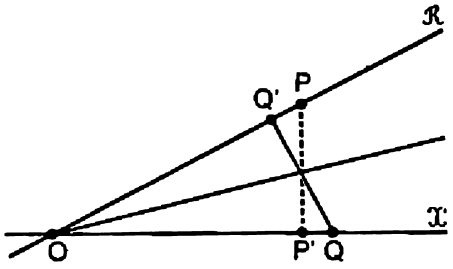


Fig. 4

Ancora un'importante osservazione:

Il rapporto di proiezione della retta $\mathfrak{R}$ sulla retta $\mathfrak{X}$ è uguale al rapporto di proiezione della retta $\mathfrak{X}$ sulla retta $\mathfrak{R}$.

Infatti, esiste una simmetria assiale che scambia fra loro la retta $\mathfrak{X}$ e la retta $\mathfrak{R}$ (possiamo, anzi,

imporre che questa simmetria scambi fra loro le semirette $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{R}'$ che si corrispondono nella proiezione; ricordare il problema del § 14.3).

Sia P un punto di $\mathfrak{R}$, P' la sua proiezione su $\mathfrak{X}$; la simmetria che abbiamo introdotto porta P in Q, P' in Q'. Essendo la simmetria un'isometria, $[Q, Q']$ risulta ortogonale ad $\mathfrak{R}$ e si ha $\overline{OQ} = \overline{OP}$, $\overline{\overline{OQ'}} = \overline{\overline{OP'}}$; dunque è $\frac{\overline{\overline{OQ'}}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{\overline{OP'}}}{\overline{OP}} = k$. Si conclude che il rapporto di proiezione è il medesimo.

Poste queste premesse (necessariamente un po' minuziose) siamo in grado di fare entrare in scena un personaggio, già noto nella scuola media, che è giustamente famoso in geometria: il teorema di Pitagora *.

Ricordiamo che si dice triangolo *rettangolo* un triangolo che ha un angolo retto: i lati adiacenti all'angolo retto si dicono **cateti**, il lato opposto si dice **ipotenusa**.

I) (Teorema di Pitagora) *In un triangolo rettangolo, il quadrato della lunghezza dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei cateti.*

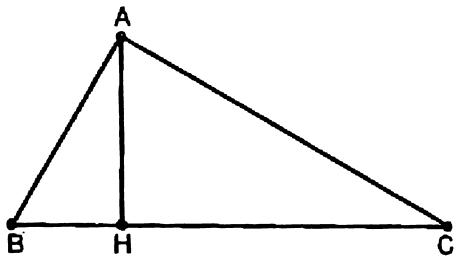


Fig. 5

Il nostro triangolo ABC abbia l'angolo retto in A. Indichiamo con k il rapporto di proiezione della semiretta BC sulla semiretta BA (ricordiamo che la notazione BC indica la semiretta con origine in B contenente il punto C). Indichiamo con k' il rapporto di proiezione della semiretta CB sulla semiretta CA. Il punto A si proietta sulla retta BC nel punto H: poiché H appartiene alla semiretta BC e anche alla semiretta CB, H risulta compreso fra B e C.

* Pitagora: celebre filosofo e matematico, vissuto fra il V e il VI secolo a. C. Non è certo che il famoso teorema sia stato scoperto da lui; probabilmente la dimostrazione rigorosa del teorema è di epoca successiva.

Compiamo alcune operazioni di proiezione.

Proiettando il punto B sulla retta CA, si ottiene:

$$\overline{CA} = k' \, \overline{BC} \qquad (2)$$

Proiettando il punto A sulla semiretta CB si ottiene:

$$\overline{CH} = k' \, \overline{CA}$$

Sostituendo il valore di $\overline{CA}$ dato dalla (2), si ha

$$\overline{CH} = k'^2 \, \overline{BC} \qquad (3)$$

Analogamente, proiettando C sulla semiretta BA, si ottiene:

$$\overline{BA} = k \, \overline{BC} \qquad (4)$$

Proiettando il punto A sulla semiretta BC, si ottiene:

$$\overline{BH} = k \, \overline{BA}$$

Sostituendo il valore di $\overline{BA}$ dato dalla (3), si ha:

$$\overline{BH} = k^2 \, \overline{BC} \qquad (5)$$

Poiché il punto H sta fra B e C, si ha $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH}$; sostituendo in questa uguaglianza i valori dati dalla (3) e dalla (5), si ha:

$$\overline{BC} = k^2 \, \overline{BC} + k'^2 \, \overline{BC} \qquad (6)$$

moltiplicando questa relazione membro a membro per $\overline{BC}$ si ricava:

$$\overline{BC}^2 = k^2\overline{BC}^2 + k'^2\overline{BC}^2 \qquad (7)$$

e, tenendo conto della (2) e della (4), si ha:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2$$

che è appunto la tesi del teorema di Pitagora.

Notiamo che dalla (6) dividendo per $\overline{BC}$ si ottiene l'interessante relazione che lega i due rapporti di proiezione:

$$k^2 + k'^2 = 1 \qquad (8)$$

Osserviamo poi che dalla relazione (2) e dalla successiva si ricava:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CH}}$$

Questa relazione va sotto il nome di *primo teorema di Euclide* e si enuncia spesso in questa forma:

Un cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.

Dimostriamo ora un teorema che si può dire *inverso* del teorema di Pitagora. Abbiamo già fatto nel § 10.3 un certo discorso che riguarda le possibilità di scambiare l'ipotesi con la tesi: un enunciato ottenuto da un altro scambiando l'ipotesi con la tesi si dice *inverso* di quello. Come abbiamo visto, non sempre l'enunciato inverso di un enunciato vero è vero. Per il teorema di Pitagora invece le cose vanno bene.

Schematicamente, il teorema di Pitagora dice:

Se un triangolo ABC è rettangolo in A allora si ha

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2$$

Il teorema inverso che ora dimostriamo dice:

II) *Se si ha $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2$ allora il triangolo ABC è rettangolo in A.*

La dimostrazione consiste nel confrontare il nostro triangolo con un opportuno triangolo rettangolo. Sia ABC un triangolo tale che $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2$.

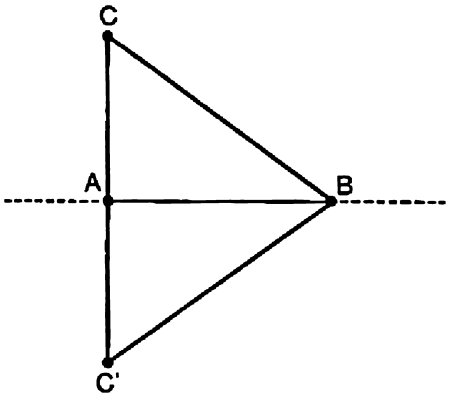


Fig. 6

Nel semipiano opposto rispetto alla retta AB, costruiamo un triangolo rettangolo in A: ABC' tale che $\overline{AC'} = \overline{AC}$. Si avrà, per il teorema di Pitagora,

$$\overline{C'B} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC'}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$$

Dunque è

$$\overline{C'B} = \overline{CB}$$

Allora il punto B, essendo equidistante da C e da C', deve trovarsi sull'asse del segmento $[C, C']$: anche il punto A deve trovarsi sull'asse, essendo $\overline{AC'} = \overline{AC}$. Ma allora la retta AB è l'asse del segmento $[C, C']$. Quindi i punti C e C' sono fra loro simmetrici rispetto all'asse AB. Essendo l'angolo $C'AB$ retto (perché appunto lo abbiamo preso retto), anche l'angolo BAC, simmetrico, deve essere retto. Cosí la dimostrazione è conclusa.

Esercizi

1 Sia A un punto fuori della retta $\mathcal{R}$ e sia $\mathcal{R}'$ una delle semirette originate dal punto O, proiezione di A su $\mathcal{R}$. Sia P un punto variabile di $\mathcal{R}'$: far vedere, col teorema di Pitagora, che se $\overline{OP}$ cresce, cresce anche $\overline{AP}$.

(Questo esercizio è già stato proposto prima; il teorema di Pitagora permette di risolverlo piú facilmente).
Prendere $\overline{OA} = 1$ ed $\overline{OP} = 1, 10, 100, 1000$ e fare il calcolo approssimato di $\overline{AP}$ (mediante un piccolo calcolatore che esegua le radici quadrate). Che cosa si nota?

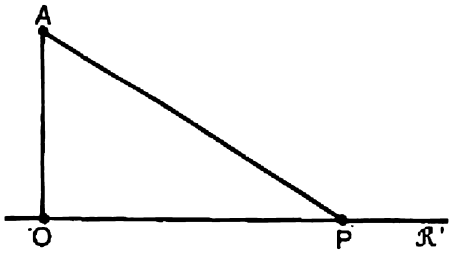


Fig. 7

* **2** Con le stesse notazioni dell'esercizio precedente, e sempre con $\overline{OA} = 1$, dimostrare la disuguaglianza:

$$0 < \overline{AP} - \overline{OP} < \frac{1}{2\,\overline{OP}}$$

3 Calcolare il rapporto di proiezione per questi angoli:

angolo della diagonale di un quadrato con un lato (45°);
angolo di un triangolo equilatero (60°);
angolo della bisettrice di un triangolo equilatero con un lato (30°).

4 In un cerchio, assegnate due corde, quello che ha dal centro distanza minore ha lunghezza maggiore.

5 Dato un cerchio di centro O ed un punto P ad esso interno, verificare che la corda di lunghezza minima che passa per P è quella perpendicolare al diametro per P.

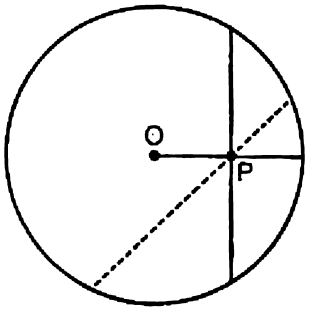


Fig. 8

15.2 Abbiamo già visto come si può costruire una parallela ad una retta $\mathcal{R}$ che passi per un punto P esterno ad essa (§ 14.3): si manda da P la perpendicolare $\mathcal{C}$ ad $\mathcal{R}$ e, successivamente, la

L'unicità della parallela e alcune importanti conseguenze

retta $\mathcal{S}$ perpendicolare a $\mathcal{C}$ per P. Ora ci domandiamo: ci possono essere altre parallele alla retta $\mathcal{R}$ per P, oltre alla $\mathcal{S}$ che abbiamo costruito?

Ogni altra retta per P è obliqua a $\mathcal{C}$: si tratta dunque di vedere se un'obliqua a $\mathcal{C}$ taglia necessariamente $\mathcal{R}$. Presa una qualsiasi obliqua, possiamo limitarci a considerare la semiretta $\mathcal{U}$ contenuta in quello dei due semipiani generati da $\mathcal{S}$ che contiene la retta $\mathcal{R}$. Questa semiretta si proietta ortogonalmente nella semiretta PM (indicando con M il punto d'incontro di $\mathcal{R}$ con $\mathcal{C}$). È evidente per la nostra intuizione che $\mathcal{U}$ incontra $\mathcal{R}$. Per dimostrarlo, riflettiamo che i punti di $\mathcal{R}$ sono tutti e soli quelli che nella proiezione su $\mathcal{C}$ vanno a finire in M. Non c'è allora che da applicare l'assioma A9: si tratta di vedere se esiste un punto Q su $\mathcal{U}$ tale che

$$\overline{PM} = k\,\overline{PQ}$$

dove k è il rapporto di proiezione di $\mathcal{U}$. Essendo $\mathcal{U}$ obliqua, k è certamente positivo (se fosse $k = 0$, $\mathcal{U}$ sarebbe contenuta in $\mathcal{S}$). L'equazione allora si risolve subito: $\overline{PQ} = \dfrac{\overline{PM}}{k}$; quindi esiste sulla semiretta $\mathcal{U}$ un punto Q che è in comune con $\mathcal{R}$. (Naturalmente, se k è molto piccolo $\overline{PQ}$ sarà molto grande: cioè Q sarà molto lontano, ma ci sarà sempre).

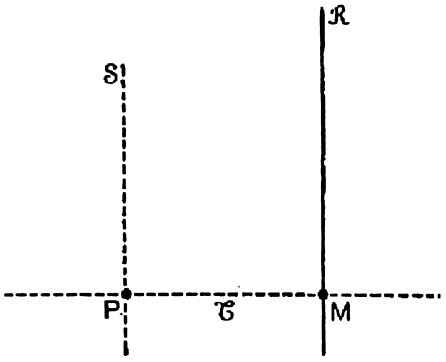


Fig. 9

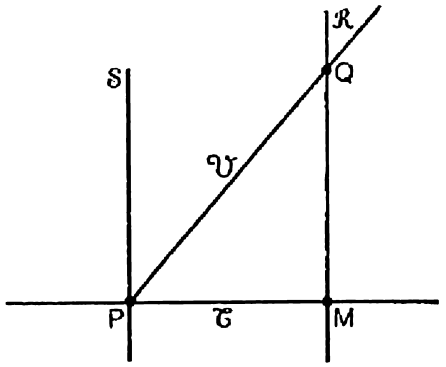


Fig. 10

Dunque, abbiamo dimostrato che:

I) *È unica la parallela mandata ad una retta da un punto ad essa esterno.*

Questa affermazione è il famoso assioma delle parallele, introdotto esplicitamente da Euclide *.

* Euclide, vissuto fra il IV e il III secolo a. C., è famoso per i suoi *Elementi* che compendiarono i risultati raggiunti dai matematici greci fino a quel tempo. Questo trattato fu considerato,

Effettivamente si potrebbe prendere come assioma questa affermazione e dimostrare l'enunciato A9, che noi invece abbiamo preso come assioma. (Ma la dimostrazione non sarebbe molto semplice).

Vediamo ora alcune conseguenze dell'unicità della parallela.

II) *Se la retta $\mathcal{A}$ è parallela a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$ è parallela a $\mathcal{C}$, allora $\mathcal{A}$ è parallela a $\mathcal{C}$.* Infatti, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ non fossero parallele, cioè se fossero incidenti, per il loro punto di incontro P passerebbero due rette parallele a $\mathcal{B}$, ciò che non può verificarsi.

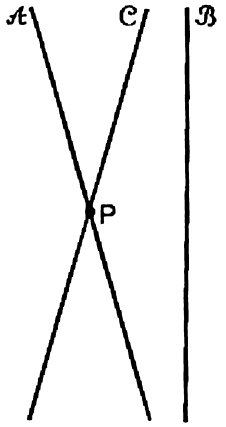


Fig. 11

Esaminiamo ora la relazione: $\mathcal{A}$ **è parallela a** $\mathcal{B}$. Questa relazione gode delle proprietà:

riflessiva, cioè $\mathcal{A}$ è parallela ad $\mathcal{A}$; questo perché, secondo la nostra definizione, due rette coincidenti sono da considerarsi parallele;

simmetrica, cioè se $\mathcal{A}$ è parallela a $\mathcal{B}$, allora $\mathcal{B}$ è parallela ad $\mathcal{A}$; anche questa proprietà è contenuta nella nostra definizione, tanto che abbiamo parlato fin da principio di *rette fra loro parallele*;

transitiva: è esattamente l'enunciato II che abbiamo dimostrato ora.

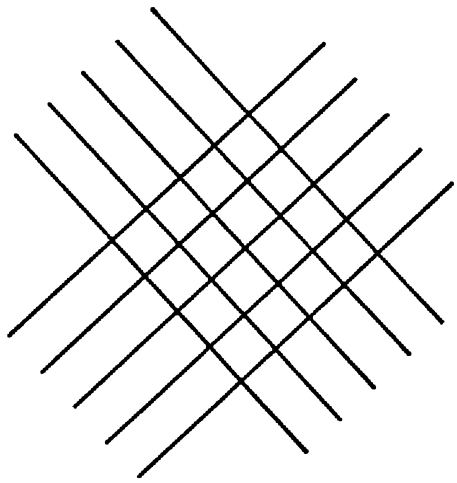


Fig. 12

Possiamo concludere (ricordando la definizione data nel § 10.1) che: *la relazione di parallelismo è una relazione di* **equivalenza.**

Dunque, le rette del piano risultano suddivise in tante classi di equivalenza, formate da rette fra loro parallele. Una classe di equivalenza si dice una **direzione.** Possiamo, ad esempio, dire che è unica la retta passante per un punto ed avente una dire-

nel corso dei secoli, un modello di rigore matematico. Effettivamente gli *Elementi* di Euclide (che trattano non solo di geometria, ma anche di aritmetica) hanno esercitato un potente influsso sullo sviluppo della matematica anche in epoca recente.

zione assegnata (è come dire: passante per un punto e parallela ad una retta assegnata).

Vediamo qualche altra conseguenza dell'unicità della parallela.

III) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ *siano parallele: allora una retta* $\mathcal{C}$ *incidente all'una è incidente all'altra.* Se $\mathcal{C}$ fosse incidente ad $\mathcal{A}$, ma parallela a $\mathcal{B}$, vi sarebbero due rette, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$, passanti per uno stesso punto e parallele a $\mathcal{B}$: e si andrebbe ancora contro l'unicità della parallela.

Proseguiamo: siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ parallele, e sia $\mathcal{C}$ una retta incidente ad entrambe (si dice anche *trasversale*). Siano A e B, rispettivamente, i punti di incontro con $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, e sia O il punto di mezzo del segmento $[A, B]$. Dunque $\overline{OA} = \overline{OB}$.

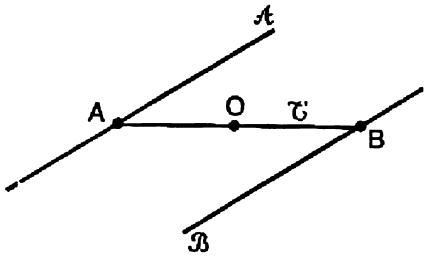


Fig. 13

Allora si può affermare che:

IV) *Una simmetria centrale con centro O porta la retta* $\mathcal{A}$ *a coincidere con la retta* $\mathcal{B}$. Infatti la simmetria centrale con centro O porta la retta $\mathcal{A}$ in una retta $\mathcal{A}'$ che passa per B ed è parallela ad $\mathcal{A}$; ma la parallela ad $\mathcal{A}$ condotta per il punto B è unica: quindi deve essere $\mathcal{A}' = \mathcal{B}$.

Ancora un semplice teorema del tutto analogo al precedente:

V) *Se* $\mathcal{R}$ *ed* $\mathcal{S}$ *sono rette parallele, una retta* $\mathcal{C}$ *ortogonale all'una è ortogonale all'altra.* Infatti siano M ed N, rispettivamente, i punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con $\mathcal{R}$ e con $\mathcal{S}$. Supponiamo che $\mathcal{R}$ sia ortogonale a $\mathcal{C}$. La retta $\mathcal{S}'$ mandata per N ortogonalmente a $\mathcal{C}$ è parallela ad $\mathcal{R}$. Ma la parallela ad $\mathcal{R}$ per N è unica, perciò $\mathcal{S}'$ coincide con $\mathcal{S}$. Quindi $\mathcal{S}$ è ortogonale a $\mathcal{C}$.

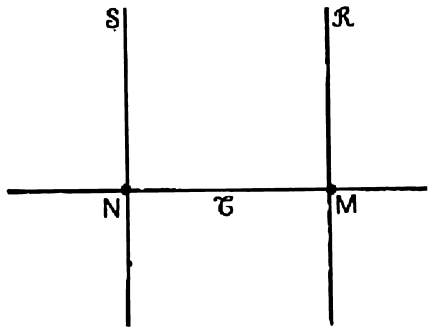


Fig. 14

Abbiamo definito il parallelogrammo come un quadrangolo dotato di un centro di simmetria e abbiamo visto che, fra le varie proprietà, esso ha

quella di avere i lati opposti paralleli. Ebbene, questa proprietà è sufficiente affinché un quadrangolo sia un parallelogrammo. Infatti, detto $ABCD$ il quadrangolo, sia O il punto di mezzo della diagonale $[A, C]$; la simmetria di centro O porta la retta AD nella retta CB, e porta la retta AB nella retta CD, come abbiamo dimostrato ora (teorema IV) e perciò porta il punto B (punto di incontro della retta AB con la retta CB) nel punto D (punto di incontro della retta CD con la retta AD). Si conclude che il quadrangolo ha un centro di simmetria e perciò è un parallelogrammo.

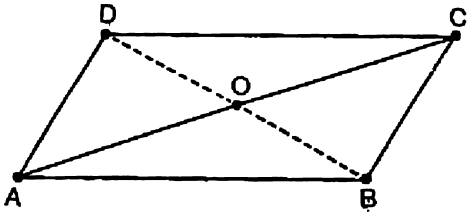


Fig. 15

Analogamente, abbiamo visto che si può definire rettangolo un quadrangolo che ha due assi di simmetria fra loro ortogonali e perpendicolari ai lati. (Quest'ultima condizione è per distinguere il rettangolo dal rombo, che ha pure due assi di simmetria fra loro ortogonali). Siamo ora in grado di caratterizzare in modo piú semplice il rettangolo.

VI) *Un quadrangolo con i lati opposti paralleli* (cioè un parallelogrammo) *che abbia un angolo retto è un rettangolo.*

Supponiamo che l'angolo A sia retto; per il teorema V tutti gli angoli sono retti. Consideriamo l'asse $\mathcal{R}$ del segmento $[A, B]$; la simmetria con asse $\mathcal{R}$ porta A in B e porta la retta AD nella retta BC (infatti una simmetria, come ogni isometria, conserva l'ortogonalità). D'altra parte, la retta CD, essendo parallela ad AB, è ortogonale ad $\mathcal{R}$ e viene trasformata in sé dalla simmetria di asse $\mathcal{R}$.

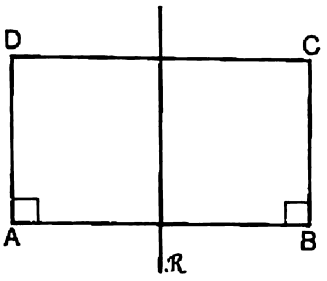


Fig. 16

Allora:

il punto D intersezione della retta AD con la retta CD viene trasformato nel punto C, che è intersezione della retta BC con la retta CD. Si conclude che $\mathcal{R}$ è un asse di simmetria del rettangolo. Alla stessa maniera si vede che il quadrilatero $ABCD$ ha un asse di simmetria che coincide con l'asse del

segmento $[A, D]$ e che è ortogonale ad AD e quindi ortogonale ad $\mathcal{R}$.

Vale infine un importante risultato:

VII) *Due rette parallele sono fra loro equidistanti.*

È abbastanza ovvio il significato di questo termine «equidistanti»: si tratta di dimostrare che se $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ sono due rette fra loro parallele e se P e Q sono due punti di $\mathcal{S}$, la distanza di P da $\mathcal{R}$ è uguale alla distanza di Q da $\mathcal{R}$. Sia P' la proiezione di P su $\mathcal{R}$, Q' la proiezione di Q su $\mathcal{R}$; il segmento $[P, P']$ è ortogonale a $\mathcal{R}$, e così pure $[Q, Q']$; i lati $[P, P']$ e $[Q, Q']$ sono fra loro paralleli. Anche i lati $[P, Q]$ e $[P', Q']$ sono paralleli per ipotesi. Allora, per il teorema VI, $PP'Q'Q$ è un rettangolo. Dunque $\overline{PP'} = \overline{QQ'}$, relazione che è appunto la nostra tesi.

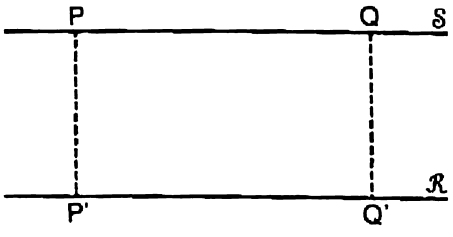


Fig. 17

Esercizi

1 $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ sono due rette che si incontrano nel punto O; A e B sono punti di $\mathcal{R}$ e di $\mathcal{S}$ rispettivamente, tali che $\overline{OA} = \overline{OB}$. Si dimostri che per ogni punto P del segmento $[A, B]$ la somma delle distanze da $\mathcal{R}$ e da $\mathcal{S}$ è costante.
(Si tenga presente l'esercizio 4 del § 14.4).

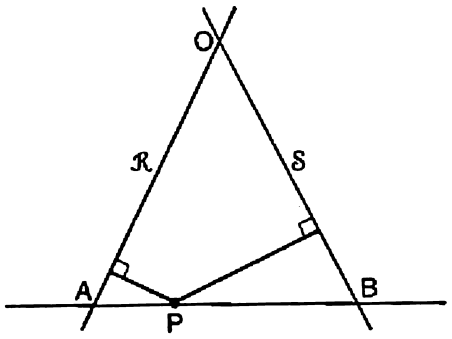


Fig. 18

2 Dimostrare che: dati tre punti A, B, C non allineati esiste un unico punto equidistante da tutti e tre (ovvero: esiste un unico cerchio che passa per tutti e tre). (Cominciare col chiedersi: quale è il luogo dei punti che hanno uguale distanza da A e B? E di quelli che hanno uguale distanza da B e da C? ...).

3 Dimostrare che un disco è un insieme convesso.

4 Dato nel piano un segmento $[A, B]$, descrivere l'insieme dei punti che hanno distanza non superiore ad r da $[A, B]$.
(Abbiamo già risolto, a livello intuitivo, un esercizio simile a questo: si tratta ora di dare una dimostrazione precisa).

** **5** Dato un cerchio di centro O e raggio r ed un punto P tale che $\overline{OP} < r$, trovare il punto del cerchio piú vicino a P.

15.3 Prendiamo nel piano due rette ortogonali fra loro, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$. Ad ogni punto P del piano possiamo associare la sua proiezione P' su $\mathfrak{X}$ e la sua proiezione P'' su $\mathfrak{Y}$. Viceversa, assegnata una coppia di punti: P' su $\mathfrak{X}$ e P'' su $\mathfrak{Y}$, c'è un unico punto P che ha come proiezione su $\mathfrak{Y}$ il punto P' e come proiezione su $\mathfrak{Y}$ il punto P''. Infatti la retta $\mathfrak{R}'$ ortogonale ad $\mathfrak{X}$ per P' e la retta $\mathfrak{R}''$, ortogonale ad $\mathfrak{Y}$ per P'', si incontrano in un unico punto P. Per rendersene conto, occorre tenere presente che $\mathfrak{R}'$ è parallela ad $\mathfrak{Y}$, essendo, come $\mathfrak{Y}$, ortogonale ad $\mathfrak{X}$; la retta $\mathfrak{R}''$, che è ortogonale ad $\mathfrak{Y}$, è ortogonale ad $\mathfrak{R}'$ e quindi è incidente a $\mathfrak{R}'$.

Gli assi cartesiani e le coordinate nel piano. Le distanze fra due punti

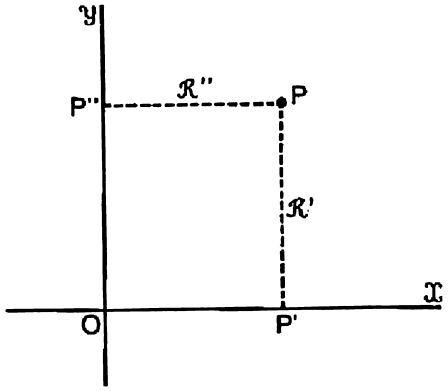


Fig. 19

Possiamo schematizzare quello che abbiamo detto con la relazione

$$P \longleftrightarrow (P', P'')$$

Ora, fissiamo una relazione di ordine (cioè un verso di percorrenza) tanto su $\mathfrak{X}$ quanto su $\mathfrak{Y}$. Per indicare questa relazione di ordine, nel disegno, contrassegniamo le rette $\mathfrak{X}$ ed $\mathfrak{Y}$ con una freccia. Sia O il punto di incontro di $\mathfrak{X}$ ed $\mathfrak{Y}$. Abbiamo già visto (nel § 13.3) che, essendo assegnata una distanza nel piano, risulta fissato un sistema di coordinate tanto su $\mathfrak{X}$ che su $\mathfrak{Y}$ con origine O. Esattamente:

Ad un punto P' della retta $\mathfrak{X}$ risulta associata una coordinata x tale che

$$x = \begin{cases} \overline{OP'} \text{ se } P' \text{ si trova sulla semiretta positiva di } \mathfrak{x} \\ -\overline{OP'} \text{ se } P' \text{ si trova sulla semiretta negativa di } \mathfrak{x} \end{cases}$$

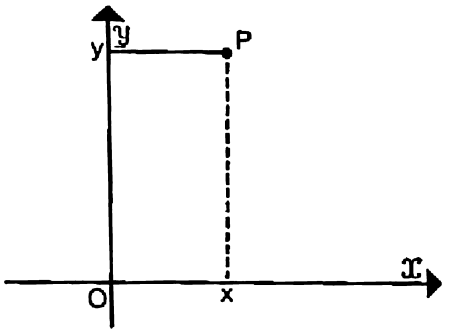


Fig. 20

Analogamente, ad un punto P'' che si trova su $\mathfrak{y}$ risulta associata una coordinata y tale che

$$y = \begin{cases} \overline{OP''} \text{ se } P'' \text{ si trova sulla semiretta positiva di } \mathfrak{y} \\ -\overline{OP''} \text{ se } P'' \text{ si trova sulla semiretta negativa di } \mathfrak{y} \end{cases}$$

Come abbiamo visto, a motivo dell'assioma A4 le corrispondenze $P' \longleftrightarrow x$, $P'' \longleftrightarrow y$ sono biunivoche. Quindi, in definitiva, risulta stabilita una corrispondenza biunivoca:

$$P \longleftrightarrow (x\,,\,y)$$

cioè *una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano e le coppie (ordinate) di numeri reali.* Per individuare un punto del piano occorre dunque dare *due* numeri reali: per questo motivo si dice che il piano è bidimensionale.

Nella terminologia usuale, x (cioè la prima coordinata) si dice **ascissa** del punto P, y (cioè la seconda coordinata) si dice **ordinata**; le rette $\mathfrak{x}$ ed $\mathfrak{y}$ si dicono **assi cartesiani**; il punto di incontro O si dice **origine**.

Dunque, mediante il procedimento descritto, abbiamo posto in corrispondenza biunivoca il piano con $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (che si scrive anche $\mathbf{R}^2$): notiamo che l'operazione di *prodotto cartesiano* ha preso nome proprio da questa prima importantissima utilizzazione, che fu fatta appunto da Cartesio.

Però il piano non è un insieme (per così dire) amorfo: gli assiomi A1, ..., A9 hanno dotato questo insieme di tante proprietà interessanti: l'esistenza di una distanza, l'esistenza di certi sottoinsiemi che sono le rette, le proprietà di ortogonalità e di parallelismo, ecc.; si tratta ora di vedere come queste proprietà vengono tradotte in $\mathbf{R}^2$.

Per ora, ci accontenteremo di vedere come viene espressa in $\mathbf{R}^2$ la distanza. C'è una questione preliminare da risolvere: come si può esprimere la distanza fra due punti della retta per mezzo delle loro coordinate?

Siano dunque P e Q punti di una retta orientata (cioè di una retta su cui sia stata fissata una relazione di ordine), con origine O. Le coordinate di P e Q siano x_1 ed x_2, rispettivamente.

Occorre distinguere vari casi: supponiamo che sia $P < Q$ e consideriamo (con un po' di pazienza) i tre seguenti sottocasi:

$O < P < Q$ cioè $0 < x_1 < x_2$

$P < O < Q$ cioè $x_1 < 0 < x_2$

$P < Q < O$ cioè $x_1 < x_2 < 0$

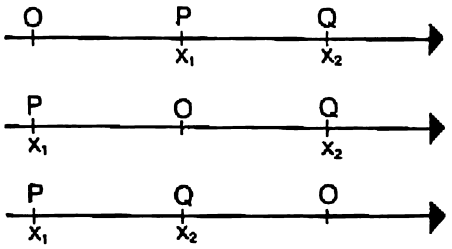


Fig. 21

Nel primo caso si ha $\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ}$ (perché P sta fra O e Q). D'altra parte è $\overline{OP} = x_1$, $\overline{OQ} = x_2$ (perché entrambi i punti P e Q sono nella semiretta positiva). Dunque $x_2 = x_1 + \overline{PQ}$, da cui $\overline{PQ} = x_2 - x_1$.

Nel secondo caso è $\overline{PQ} = \overline{OP} + \overline{OQ}$ (perché O sta fra P e Q), e si ha $\overline{OP} = -x_1$ (perché P è nella semiretta negativa), $\overline{OQ} = x_2$ (perché Q è nella semiretta positiva). Dunque $\overline{PQ} = x_2 - x_1$.

Nel terzo caso è $\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{PQ}$ (perché Q sta fra P ed O) ma è $\overline{OQ} = -x_2$, $\overline{OP} = -x_1$ (perché tanto P che Q stanno nella semiretta negativa). Perciò $-x_1 = -x_2 + \overline{PQ}$; da cui $\overline{PQ} = x_2 - x_1$.

Dunque, in tutti e tre i nostri sottocasi la distanza è data dalla formula

$$\overline{PQ} = x_2 - x_1$$

Che succede se P segue Q? La distanza è simmetrica e quindi possiamo computarla come prima, tenendo conto che ora P segue Q. Dunque, in questo caso si ha:

$$\overline{PQ} = x_1 - x_2$$

In conclusione, raccogliendo i risultati di questa casistica, si ha:

$$\overline{PQ} = \begin{cases} x_2 - x_1 \text{ se è } x_2 > x_1 \\ x_1 - x_2 \text{ se è } x_1 > x_2 \end{cases}$$

Queste formule si possono compendiare nell'unica formula:

$$\overline{PQ} = | x_2 - x_1 |$$

che vale evidentemente anche quando è $P = Q$, cioè $x_1 = x_2$.

Prendiamo ora nel piano due punti qualunque $P \longleftrightarrow (x_1 , y_1)$ e $Q \longleftrightarrow (x_2 , y_2)$ e proponiamoci di valutare la loro distanza.

Consideriamo il rettangolo di vertici:

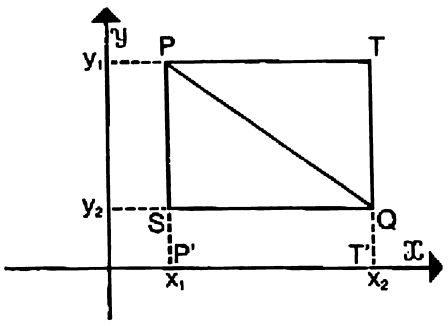


Fig. 22

$P \longleftrightarrow (x_1 , y_1)$; $S \longleftrightarrow (x_1 , y_2)$; $Q \longleftrightarrow (x_2 , y_2)$; $T \longleftrightarrow (x_2 , y_1)$

P e Q sono dunque vertici opposti.

La distanza tra P e Q è la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo PSQ, oppure del triangolo PTQ. Non c'è allora che da applicare il teorema di Pitagora ad uno dei due triangoli rettangoli: ad esempio a PTQ. Proiettiamo i punti P e T sull'asse $\mathfrak{x}$, ottenendo i punti P', T' di coordinate x_1, x_2; si ha evidentemente $\overline{PT} = \overline{P'T'} = | x_2 - x_1 |$.

Analogamente, si trova che è $\overline{TQ} = | y_2 - y_1 |$. Perciò:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{TQ}^2 = | x_2 - x_1 |^2 + | y_2 - y_1 |^2$$

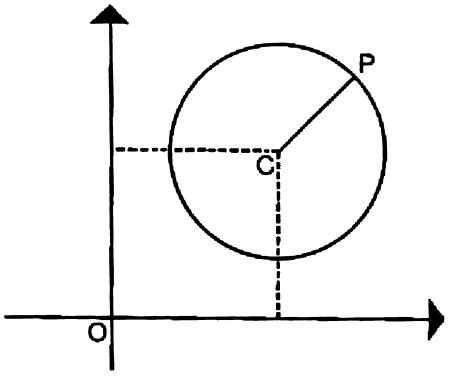


Fig. 23

D'altra parte, si ha $| x_2 - x_1 |^2 = (x_2 - x_1)^2$ perché $| x_2 - x_1 |$ può essere uguale a $x_2 - x_1$, oppure a $x_1 - x_2 = (-1)(x_2 - x_1)$: passando al quadrato il fattore (-1) si trasforma in 1.

Analogamente: $| y_2 - y_1 |^2 = (y_2 - y_1)^2$. Dunque:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (9)$$

Questa è la formula che esprime la distanza fra P e Q mediante le coordinate. È una formula di grande interesse: essa permette intanto di descrivere in termini algebrici una figura molto importante: il cerchio. Supponiamo infatti di avere un cerchio con centro $C \longleftrightarrow (\bar{x} , \bar{y})$ e raggio r; a quali condizioni devono soddisfare le coordinate (x , y) di un punto P perché P stia sul cerchio? Evidentemente, basta imporre per mezzo della formula (9) che la distanza fra P e C sia uguale ad r. Conviene per semplicità fare intervenire il quadrato della distanza: $\overline{PC}^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2$.

Il punto sta sul cerchio se e solo se il valore di questa espressione è esattamente r^2. Cioè: i punti del cerchio sono esattamente i punti P le cui coordinate (x, y) soddisfano l'equazione:

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = r^2 \qquad (10)$$

Abbiamo fatto una specie di traduzione da un linguaggio ad un altro: dal linguaggio della geometria al linguaggio dell'algebra. Concretamente: dalla *figura* (o, se si vuole, dall'*insieme*) cerchio all'*equazione* (10).

La **geometria analitica** (che fu introdotta da Cartesio) è il ramo della matematica che si occupa di questa traduzione dalla geometria all'algebra, o viceversa. Vedremo molte volte, in futuro, quanto sia utile trasformare un problema di geometria in un problema di algebra, oppure trasformare un problema di algebra in un problema di geometria. Quando ci si occupa di questioni di geometria c'è molte volte il vantaggio dell'intuizione: la soluzione «si vede». Quando ci si occupa di algebra, si può utilizzare quella formidabile macchina che è appunto l'algebra. La geometria analitica permette di avere a disposizione, nella soluzione dei problemi, le risorse dell'algebra e quelle della geometria, utilizzando nei singoli casi quelle che sono piú efficaci.
In questo capitolo abbiamo appena cominciato questo lavoro di traduzione: in seguito lo completeremo.

Vocaboli e simboli

obliqua
rapporto di proiezione
(angolo) **acuto**
triangolo rettangolo: cateti, ipotenusa
direzione
assi cartesiani; origine

coordinate; ascissa e ordinata (di un punto)
$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$
geometria analitica

Esercizi

1 Presa una coppia di assi cartesiani nel piano e fissato il punto (1 , 0), rappresentare:

a) i punti di coordinate (2 , 3) ; (3 , 2) ; (— 2 , 5) ; (— 1 , — 3);
b) l'insieme dei punti $P \longleftrightarrow (x , y)$ per cui è $x = y$,
c) l'insieme dei punti $P \longleftrightarrow (x , y)$ per cui è $y \geqslant x$.

2 Dato un sistema di riferimento cartesiano $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ trovare le coordinate dei punti che corrispondono al punto $P \longleftrightarrow (x , y)$ in una simmetria che ha come asse $\mathfrak{X}$ e in una simmetria che ha come asse $\mathfrak{Y}$.

3 Un parallelogrammo *A B C D* ha il centro nell'origine *O* di un sistema di riferimento cartesiano. Si ha: $A \longleftrightarrow (2 , 1)$; $B \longleftrightarrow (3 , 3)$. Trovare *C* , *D* e disegnare il parallelogrammo. (Come si può rappresentare una simmetria centrale per mezzo delle coordinate?).

4 Studiare la simmetria assiale che scambia fra loro la semiretta positiva dell'asse $\mathfrak{X}$ e la semiretta positiva dell'asse $\mathfrak{Y}$. Quale è l'asse di questa simmetria? Quale è il corrispondente di un punto $P \longleftrightarrow (x , y)$?

* **5** In ogni parallelogrammo i quadrati delle lunghezze dei quattro lati e i quadrati delle lunghezze delle due diagonali hanno uguali somme. (Prendere un sistema di riferimento cartesiano con centro nel centro del parallelogrammo e tale che una delle diagonali stia sull'asse $\mathfrak{X}$; le coordinate di due vertici opposti saranno allora (*a* , 0) e (— *a* , 0); calcolare i quadrati delle distanze degli altri due vertici da questi . . .).

6 Dimostrare che i tre vertici di un triangolo rettangolo hanno uguale distanza dal punto di mezzo dell'ipotenusa.
(Fare una simmetria centrale con centro nel punto di mezzo dell'ipotenusa).

7 Un parallelogrammo in cui le diagonali hanno uguale lunghezza è un rettangolo.
(Se le diagonali hanno uguale lunghezza, il centro ha uguale distanza dai quattro vertici; cercare allora gli assi di simmetria . . .).

8 Un triangolo *ABC* inscritto in un semicerchio avente come diametro $[B , C]$ è rettangolo in *A*. (Fare una simmetria centrale con centro nel punto di mezzo di $[B , C]$).

9 Un segmento di lunghezza fissa 1 si muove mantenendo gli estremi sui lati di un angolo retto. Trovare il luogo descritto dal suo punto di mezzo.